

МИНИСТЕРСТВО ПРОСВЕЩЕНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Министерство образования и науки Хабаровского края

Управление образования администрации города Хабаровска

МБОУ гимназия № 7

РАССМОТРЕНО

на заседании
творческой
лаборатории учителей
протокол № 1 от
28.08.2023
руководитель
творческой
лаборатории учителей



Трубачева М.В.

ПРИНЯТО на заседании
педагогического совета
протокол № 1 от «30» 08
2023 г.

СОГЛАСОВАНО


Заместитель директора
по УВР



Конькова Л.Н.
от «29» 08 2023 г.

УТВЕРЖДЕНО

Директор гимназии



Иванова Н.В.
приказ № 76 от «30» 08
2023 г.

РАБОЧАЯ ПРОГРАММА

внеурочной деятельности «Олимпиадная школа»

для обучающихся 1-9 классов

город Хабаровск 2023-2024 уч.год

ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА

Примерная рабочая программа внеурочной деятельности «Олимпиадная математика» для 1–9 классов общеобразовательных организаций разработана на основе ФГОС начального общего образования и ФГОС основного общего образования, Концепции духовно-нравственного развития и воспитания личности гражданина России, Рабочей концепции одаренности [1], дидактической системы «Учусь учиться» (Л. Г. Петерсон) [3].

Программа разработана в НОУ ДПО «Институт системно-деятельностной педагогики» (Институт СДП) — Федеральной инновационной площадке Министерства просвещения РФ по теме «Механизмы сохранения лидирующих позиций Российской Федерации в области качества математического образования (ИМС «Учусь учиться»)» (2021–2023 гг.). Реализует «Концепцию выращивания способностей и одаренности» Института СДП применительно к выращиванию математических способностей и одаренности.

Программа направлена на выращивание математических способностей и одаренности детей, их общеинтеллектуальное и личностное развитие, повышение качества подготовки к математическим олимпиадам и качества математического образования в целом.

Общая характеристика курса

Математические олимпиады в настоящее время принято считать элитным направлением: в них вовлечено ограниченное число школьников, чаще всего из математических классов или профильных образовательных организаций. При этом мощный ресурс олимпиадной математики как эффективного инструмента интеллектуального и личностного развития детей в массовой школе используется недостаточно.

Олимпиадные задачи — это, как правило, нестандартные задачи, поэтому для их решения недостаточно просто применить приобретенные на уроках знания и умения. Решение любой олимпиадной задачи — это всегда пусть маленькое, но открытие, демонстрирующее красоту математической мысли и позволяющее пережить радость творчества и удовольствии от интеллектуальной деятельности. Решение олимпиадных задач развивает у *каждого* ребенка глубину и гибкость мышления, воображение, самостоятельность и трудолюбие, творческие способности, повышает интерес к математике и уровень математической подготовки. Поэтому вовлечение в олимпиадную математику важно *для всех* учеников: мате-

математически одаренные дети в творческой среде смогут полнее реализовать свой потенциал и вырастить свой математический талант, сохраняя физическое и психическое здоровье, а все остальные — развить свои математические способности и успешнее учиться, что пригодится в любом деле.

Между тем можно выделить целый ряд проблем, создающих препятствия для привлечения в олимпиадную среду учащихся массовой школы: недостаточная мотивация школьников к участию в олимпиадном движении, «оторванность» олимпиадной математики от основного школьного курса, недостаточная системность олимпиадной подготовки, отсутствие преемственности между разными уровнями образования.

Целью курса «Олимпиадная математика» является системная подготовка учащихся 1–9 классов к математическим олимпиадам, ориентированная на вовлечение школьников в математическую деятельность, развитие мотивации, мышления, творческих способностей и за счет этого — достижение более высокого уровня их олимпиадной и общей математической подготовки.

Концептуальная идея данного курса состоит в том, чтобы на основе системно-деятельностного подхода разработать педагогический инструментарий (учебное содержание, технологии, методики, методическое обеспечение) непрерывной олимпиадной подготовки по математике в 1–9 классах, организовать обучение и методическое сопровождение учителей, стремящихся повысить мотивацию и качество математической подготовки своих учеников.

Методологической основой реализации поставленной цели являются следующие принципы:

1) **Принцип развития**, который состоит в том, что олимпиадная подготовка должна быть нацелена прежде всего на создание условий для всестороннего развития мышления и личностных качеств каждого ученика, а не ограничиваться тренингом в освоении ими методов олимпиадной математики. Суть этого принципа можно кратко выразить тезисом: *«развитие средствами олимпиадной математики каждого ученика»*.

2) **Принцип «выращивания»** состоит в совмещении, с одной стороны, внутренней активности ученика, его целенаправленных попыток раскрыть и реализовать свой потенциал, а с другой стороны, внешней организации этой активности со стороны учителя в рамках той же цели [3, с. 503].

3) **Принцип успешности** состоит в акцентировке на успешность, то есть в создании такой среды, где к ошибке относятся как к ступеньке роста, а не поводу для огорчения

и порицания, где ценится и поддерживается успех каждого ученика относительно себя, независимо от начального уровня его подготовки и математических способностей.

Основными особенностями курса «Олимпиадная математика» являются:

1) системность и непрерывность олимпиадной подготовки учащихся с 1 по 9 класс (на уровне технологий, содержания и методик), ее достаточная полнота;

2) мотивация и вовлечение учащихся в самостоятельную математическую деятельность на основе системно-деятельностного подхода;

3) выращивание общеучебных интеллектуальных умений, необходимых для решения олимпиадных задач: умения эффективно преодолевать трудности, владения общими подходами к решению нестандартных задач, умения работать в команде и др.;

4) создание творческой, эмоционально окрашенной образовательной среды, где каждый ученик имеет возможность добиться успеха;

5) создание единого пространства урока и внеурочной деятельности (синхронизация с непрерывным курсом математики «Учусь учиться» для 1–9 классов и системой математических олимпиад ВсОШ);

6) широкое методическое обеспечение (программа, учебные пособия для детей, подробные решения заданий, методические рекомендации по организации занятий в технологии «Математический театр», сценарии занятий с подробными решениями, презентациями, раздаточными и демонстрационными материалами);

7) методическая поддержка учителей в рамках ИМС «Учусь учиться» (консультации, курсы, сетевые события с демонстрацией открытых занятий, творческие лаборатории и др.).

Каждая из перечисленных особенностей положительным образом влияет на качество олимпиадной подготовки и технологически обеспечивается педагогическими инструментами системы «Учусь учиться» (метод рефлексивной самоорганизации, технология деятельностного метода (ТДМ), система дидактических принципов, метод ролей, технология «Математический театр»).

Ключевым отличием курса «Олимпиадная математика» в сравнении с другими курсами, разработанными в данной области, является опора на общую теорию деятельности ММПК [3], что позволяет оснастить педагогов практически инструментами не случайного решения актуальных проблем подготовки школьников к математическим олимпиадам.

Системность и непрерывность, организация самостоятельной математической деятельности учащихся, их эмоциональная поддержка и индивидуальный темп продвижения, развитие мотивации, познавательных процессов и творческого потенциала, единое пространство реализации системно-деятельностного подхода на уроках и во внеурочной деятельности открывают для каждого ребенка возможность не только осваивать содержание олимпиадной подготовки на уровне своего максимума, но и развивать свои общие интеллектуальные способности к решению нестандартных задач, что жизненно важно для всех детей.

Содержание курса «Олимпиадная математика» соотносено с содержанием непрерывного курса математики «Учусь учиться» для начальной и основной школы 1–9 (авторы Л. Г. Петерсон, Н. Х. Агаханов, Г. В. Дорофеев и др.), но может использоваться и в школах, работающих по другим программам математики. Курс строился с опорой на «золотой фонд» олимпиадной литературы и проверенные временем методы и приемы решения олимпиадных задач по математике.

Место курса в учебном плане

Курс «Олимпиадная математика» является курсом внеурочной деятельности, в ходе его изучения учащиеся проходят 3 этапа.

Программа I этапа (подготовительного) предназначена для учащихся 1–2 классов и рассчитана на 64 ч (1 класс — 30 ч, 2 класс — 34 ч).

Программа II этапа (ознакомительного) предназначена для учащихся 3–6 классов и рассчитана на 272 ч (по 2 ч в неделю в 3, 4, 5 и 6 классах).

Программа III этапа (практического) предназначена для учащихся 7–9 классов и рассчитана на 204 ч (по 2 ч в неделю в 7, 8 и 9 классах).

СТРУКТУРА И СОДЕРЖАНИЕ КУРСА

Содержание курса «Олимпиадная математика» структурировано в 21 тематическую линию. Эти линии непрерывно развиваются с 1 по 9 класс, достаточно полно представляют традиции олимпиадной подготовки и углубляют знания школьной программы по математике. Выбор содержания осуществляется с опорой на золотой фонд олимпиадной литературы, проверенные временем методы и приемы решения олимпиадных задач.

Содержание курса на каждом этапе обучения учитывает возрастные особенности развития детей.

I этап — **мотивационный** (подготовительный) (1–2 классы)

Основной задачей данного этапа является формирование мотивации к решению нестандартных математических задач на основе механизма «надо» — «хочу» — «могу».

На данном этапе реализуется проект «Задача дня». Детям систематически предлагаются нестандартные математические задачи в зоне их ближайшего развития («надо») и создается ситуация успеха, которая всегда вызывает радостные чувства и эмоции («хочу»). В результате удовлетворяются базисные потребности детей в безопасности, общении и поддержке, накапливается опыт решения нестандартных задач, готовится мышление и снимается страх перед новым и неизвестным («могу»). Здесь же происходит первое знакомство детей с коммуникативными ролями «автора» и «понимающего», а также ролями мыслителя, решающего математическую задачу (с. 30). Все эти роли построены на основе метода рефлексивной самоорганизации (PCO).

II этап — **ознакомительный** (3–6 классы)

Основной задачей данного этапа является знакомство учащихся с базовыми подходами, методами и приемами решения олимпиадных задач в соответствии с содержанием курса «Олимпиадная математика», а также формирование первичного опыта применения этих методов.

На данном этапе реализуется технология «Математический театр», которая позволяет создать в классе творческую среду, где выращиваются навыки общения и коммуникации, уважение и признание достижений каждого учащегося, устойчивая познавательная мотивация, вера в себя. Роли мыслителя, которые дети постепенно осваивают на данном этапе, дают возможность овнешнить внутренние мыслительные действия по решению нестандартных интеллектуальных за-

дач, сделать их доступными для детей с разными типами мышления и за счет этого вовлечь более широкий круг учащихся в олимпиадное движение.

III этап — *практический* (7–9 классы)

На данном этапе увеличивается доля самостоятельности учащихся в применении метода рефлексивной самоорганизации при решении олимпиадных задач. Продолжается отработка базовых приемов и методов олимпиадной математики, но основной задачей становится теперь освоение общих подходов к решению нестандартных задач, применение их к решению более сложных, «многоходовых» задач и переход к самостоятельной разработке новых способов.

Использование технологии «Математический театр» помогает поддерживать в классе творческую среду, окрашенную позитивными эмоциями. При этом роли «мыслителя», овнешняющие умственные действия при решении нестандартных задач, постепенно переходят во внутренний план, их исполнение автоматизируется и становится прочной базой не только самостоятельного применения новых подходов к решению нестандартных математических задач, но и самостоятельного поиска (например, появляются задачи на дополнительные построения в геометрии, где недостаточно «знать», а нужно «увидеть» новый, неожиданный способ решения).

Соответственно, коллективные и групповые формы достижения успеха в решении олимпиадных задач все чаще дополняются индивидуальными. Все это отвечает потребностям детей в познании, открытии, созидании, порождает важное для их познавательной мотивации интеллектуальное удовольствие и уважение к достижениям (своим и других).

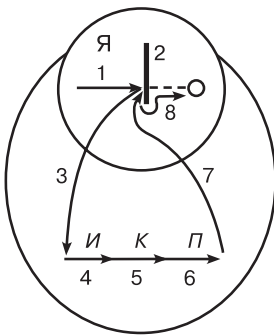
В результате прохождения учащимися этих трех этапов открывается возможность не только повысить качество олимпиадной и общей математической подготовки учащихся, но и создать в классе среду уважения к успеху и стремления к успеху, развить их познавательную мотивацию, поддержать психологическое здоровье детей и их личностный рост к наивысшим уровням развития.

Организация образовательного процесса

Образовательный процесс в курсе «Олимпиадная математика» строится на основе дидактической системы деятельностного метода «Учусь учиться» (Л. Г. Петерсон), реализующей системно-деятельностный подход, где в качестве теоретической базы выбрана общая теория деятельности ММЖ и ММПЖ (Г. П. Щедровицкий, О. С. Анисимов).

Ключевым инструментом, обеспечивающим реализацию принципа развития в курсе «Олимпиадная математика», является закон рефлексивной самоорганизации (PCO). PCO — это процесс, в котором происходит развитие человека посредством «правильного» (эффективного) преодоления затруднений. Суть закона PCO состоит в том, что в ситуации затруднения следует направить свои эмоциональные и интеллектуальные ресурсы на выявление причины, которая мешает двигаться вперед, и ее целенаправленно устранить [2, с. 33].

Рефлексивная самоорганизация, мини-цикл (PCO)

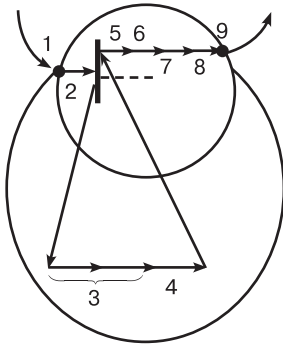


1. Признаю мое затруднение в достижении конкретной цели, спокойно к нему отношусь.
2. Фиксирую его в форме: «Я пока не могу (решить данную конкретную задачу)».
3. Начинаю думать.
4. Анализирую ситуацию (Исследование).
5. Нахожу причину затруднения (Критика).
6. Придумываю способ преодоления затруднения (Проект).
7. Начинаю действовать.
8. Реализую проект и достигаю цели.

Метод PCO положен в основу технологии деятельностного метода Л. Г. Петерсон (ТДМ), которая реализована как в непрерывном курсе математики «Учусь учиться», так и в курсе «Олимпиадной математики». Из схемы ТДМ, приведенной ниже, видно, что при работе в данной технологии учащиеся на каждом уроке полноценно проходят мини-цикл PCO (этапы 2–5), а значит, учатся не бояться трудностей и добиваться результата в нестандартной ситуации, развивают мышление и творческие способности, тренируют свои *soft skills*. При этом ТДМ обеспечивает системное прохождение детьми всех необходимых этапов глубокого и прочного усвоения знаний (П. Я. Гальперин).

Таким образом, школьники имеют возможность системно наращивать важные для олимпиадной подготовки интеллектуальные и общеучебные умения, повышая при этом качество освоения способов решения олимпиадных задач [3, с. 28].

Технология деятельностного метода (ТДМ)



1. Мотивация к учебной деятельности.
2. Актуализация и фиксирование индивидуального затруднения в пробном действии.
3. Выявление места и причины затруднения.
4. Построение проекта выхода из затруднения.
5. Реализация построенного проекта.
6. Первичное закрепление с проговариванием в громкой речи.
7. Самостоятельная работа с самопроверкой.
8. Включение в систему знаний и повторение.
9. Рефлексия учебной деятельности.

Общий методологический базис урока и внеурочной деятельности позволяет также создать единое пространство уроков по курсу математики «Учусь учиться» и внеурочной деятельности по курсу «Олимпиадной математики». Однако в отличие от уроков в школе, где учащиеся открывают новое практически всегда под руководством учителя, а затем применяют его в однотипных заданиях, в олимпиадной математике от школьников, как правило, требуется самим придумать новые приемы решений. Но в силу возрастных особенностей они не могут освоить инструмент РСО в абстрактном виде. Поэтому для олимпиадной математики разработаны *метод ролей* и технология «Математический театр», которые каждому мыслительному действию в РСО сопоставляют знакомый детям жизненный образ, помогающий им «расшифровать», упорядочить и «присвоить» соответствующие мыслительные действия.

Любая технология задает определенные условия своей реализации. Условия реализации ТДМ были также выведены не случайным образом из законов деятельности и сформулированы в виде семи *дидактических принципов*, общих как для уроков математики по курсу «Учусь учиться», так и для занятий по «Олимпиадной математике».

Дидактические принципы деятельностного метода обучения [3, с. 34]:

1) *Принцип деятельности* заключается в том, что ученик, получая знания не в готовом виде, а добывая их сам, осознает

содержание и формы своей учебной деятельности, понимает и принимает систему ее норм, активно участвует в их совершенствовании, что способствует успешному формированию его общекультурных и деятельностных способностей, общеучебных умений.

2) *Принцип непрерывности* означает преемственность между всеми этапами обучения на уровне технологии, содержания и методик с учетом возрастных психологических особенностей развития детей.

3) *Принцип целостности* предполагает формирование у учащихся обобщенного, целостного представления о мире (природе, обществе, самом себе, социокультурном мире и мире деятельности, о роли и месте каждой науки в системе наук).

4) *Принцип минимакса* заключается в следующем: школа должна предложить ученику возможность освоения содержания образования на максимальном для него уровне (определяемом зоной ближайшего развития возрастной группы) и обеспечить при этом усвоение содержания на уровне социально безопасного минимума (то есть минимального уровня, позволяющего продолжить учебу в школе).

5) *Принцип психологической комфортности* предполагает снятие стрессообразующих факторов образовательного процесса, создание атмосферы доброжелательности и взаимной поддержки, ориентированной на реализацию идей педагогики сотрудничества и развитие диалоговых форм общения.

6) *Принцип вариативности* предполагает формирование у учащихся способностей к систематическому перебору вариантов и адекватному принятию решений.

7) *Принцип творчества* означает максимальную ориентацию на творческое начало в образовательном процессе, создание условий для приобретения учащимся собственного опыта творческой деятельности.

Система дидактических принципов и технология деятельностного метода составляют базис для педагогического инструментария олимпиадной подготовки, обеспечивающего единое пространство с уроками по математике и практическую реализацию принципов, положенных в основу курса «Олимпиадной математики» (принципов развития, «вырачивания» и успешности).

Оценивание результатов в курсе «Олимпиадная математика» происходит в логике достижений — не только математических, но и личностных, «относительно себя». При этом для каждого следующего шага ребенку необходимо предпринять определенные усилия, проявить терпение, трудолюбие, но трудность должна быть преодолимой. Обсуждаются вопро-

сы: «Что получилось?», «Что вызвало затруднение?», «Чему научился, решая (разбирая) задачу?», «Что пожелаю себе?», «За что могу похвалить себя, других?». Учитель организует в классе ситуацию взаимной поддержки и совместного переживания радости победы.

Текущий контроль по данному курсу осуществляется в течение всего учебного года. При оценивании работ следует исходить из того, что основной целью подведения итогов в рамках курса «Олимпиадная математика» является формирование положительной мотивации учащихся к решению математических задач. Поэтому обязательным является соблюдение следующих требований:

1) фиксируются только достижения, а относительно неудач проводится рефлексия и намечается план коррекции;

2) акцент в оценивании смещается на САМОоценку детьми своих достижений: ежедневно в проекте «Задача дня» и/или один раз в неделю в курсе «Математический театр»;

3) при подведении итогов следует учитывать не только результат, но и вложенные учеником усилия, а также динамику результатов «относительно себя»;

4) по результатам психологического тестирования качеств личности никакие отметки не выставляются.

Уровень освоения учащимися той или иной темы учитель может выявить в ходе предложенных в курсе математических игр.

Основными показателями результативности проводимой работы по курсу «Олимпиадная математика» является возрастание познавательной мотивации учащихся, их участие и результаты в математических олимпиадах разного уровня (в том числе, в обучающей «Олимпиаде Петерсон»), повышение глубины и качества знаний по математике.

Подготовительный этап («Задача дня»).

1–2 классы¹⁾

Цель этапа: подготовить мышление детей и на основе механизма «надо» — «хочу» — «могу» сформировать мотивацию к решению нестандартных математических задач.

Задачи этапа:

1) вовлечь учащихся в систематическое решение нестандартных математических задач в зоне их ближайшего развития («надо»);

1) Данный проект может быть реализован на любом этапе обучения с поправкой на возрастные особенности учащихся, которые потребуют коррекции форм и содержания образовательного процесса.

2) создать творческую, доброжелательную, безопасную (с позиций права на ошибку) образовательную среду, ориентированную на поддержку успеха каждого ученика относительно себя («хочу»);

3) подготовить к правильному восприятию нестандартных задач: снять неуверенность и страх («могу»), создать возможность для каждого ученика пережить ситуацию успеха и получить удовольствие от решения сложных задач («хочу», «могу»);

4) тренировать мыслительные операции, навыки парной и групповой работы;

5)* сформировать, по возможности, опыт коммуникативного взаимодействия в позициях «автора» и «понимающего», начальные представления о «ролях мыслителей» при решении задач (ролях *фотографа, разведчика, переводчика, навигатора, мастера, эксперта*) (с. 30).

Содержание подготовительного этапа («Задача дня»)

Содержание проекта «Задача дня» структурировано в 21 тематическую линию, которые преемственно развиваются с 1 по 9 класс. Данное содержание согласовано с непрерывным курсом математики «Учусь учиться» для 1–2 классов общеобразовательной школы.

I. АРИФМЕТИКА

1. Суммы

Числовой луч как инструмент при решении арифметических задач. Обратные действия. Приемы восстановления пропущенных чисел и знаков действий (+, –) в примерах.

Приемы упрощения устного счета (сложение, вычитание): с помощью арифметических законов, дополнения до круглого числа. Свойство изменения последней цифры числа при сложении, вычитании.

2. Числа и их свойства

Равенства со спичками (сложение, вычитание).

Приемы решения задач на правильную расстановку скобок и знаков, восстановление знаков действий. Перебор вариантов в задачах на расстановку знаков и скобок.

3. Закономерности

Числовые закономерности на сложение, вычитание, умножение, деление. Выявление и построение простейших закономерностей. Восстановление пропущенных элементов последовательностей.

4. Время и движение

Величины и их измерение. Единицы измерения длины, массы, объема (вместимости), времени, площади. Схемы в задачах о величинах.

Преобразование единиц измерения величин.

II. ГЕОМЕТРИЯ

1. Геометрическое мышление

Геометрические фигуры и их свойства. Плоские и пространственные фигуры.

Составление плоских фигур из частей. Разрезания плоских фигур на две и более части. Танграм.

Математика и красота в окружающем мире. Узоры и перенос фигур. Красота и симметрия.

2. Площади

Предварительный подсчет количества клеток в частях, на которые нужно разрезать фигуру. Разрезания на части с ограничениями.

3. Геометрические неравенства

Составление фигур из палочек. Вычисление длин ломаных на клетчатой сетке. Сравнение длин пути по прямой и по ломаной линии.

III. АЛГЕБРА

1. От чисел к буквам

Составление числовых и буквенных выражений по рисункам. Буквенные равенства и неравенства. Буквенная запись свойств чисел и фигур. Простые уравнения и их образная интерпретация с помощью весов и геометрических фигур.

Идея единичного отрезка (части). Чертежи (схемы) с относительными размерами отрезков.

Простые уравнения на умножение и деление и их образная интерпретация с помощью прямоугольника.

2. Функциональные зависимости

Свойства предметов (цвет, форма, размер). Таблицы. Наблюдение зависимостей между величинами, компонентами арифметических действий. Задание зависимостей между величинами с помощью буквенных равенств (формул) и таблиц.

Числовой отрезок и числовой луч.

3. Неравенства и оценки

Сравнение групп предметов. Сравнение чисел и выражений. Отношения и знаки «равно», «не равно», «больше», «меньше». Разностное и кратное сравнение. Логические задачи на части и целое.

IV. ТЕОРИЯ ЧИСЕЛ

1. Делимость

Отношения «делится», «не делится». Делители и кратное. Четные и нечетные числа. Свойство чередования четных и нечетных чисел на числовом луче.

2. Остатки

Деление с остатком. Поиск закономерностей на числовом луче. Свойство последней цифры при сложении, вычитании. Закономерности в таблице умножения.

V. ЛОГИКА

1. Математическая логика

Верно и неверно.

Логические задачи-шутки (задачи на устранение мнимых логических противоречий, внимательность). Табличная запись шагов рассуждения в логических задачах. Метод исключения. Анализ высказываний с отрицанием.

2. Принципы решения задач

Рассуждение. Алгоритм решения задачи.

Расположение объектов в порядке возрастания (убывания). Опыт перебора вариантов.

3. Алгоритмы и конструкции

Представление об алгоритме. Порядок действий. Составление алгоритмов решения в арифметических и простых логических задачах.

4. Игры и стратегии

Игры-соревнования как инструмент формирования представлений о стратегии.

VI. КОМБИНАТОРИКА И ТЕОРИЯ МНОЖЕСТВ

1. Комбинаторика

Перестановки. Перебор всех вариантов перестановки двух и трех объектов. Перестановки с ограничениями. Подсчет количества вариантов перестановки. Связь между количеством перестановок двух и трех объектов.

Дерево возможностей как способ систематического перебора вариантов.

2. Теория множеств

Разбиение предметов на части по свойствам («мешки»). Элементы группы. Задание группы предметов с помощью перечисления элементов. Выделение части группы. Сложение и вычитание групп предметов. Изображение групп с помощью овалов.

Сравнение групп предметов по количеству.

VII. КОМБИНАТОРНАЯ ГЕОМЕТРИЯ

1. Раскраски и разбиения

Раскраска и составление фигур по заданным условиям.

2. Теория графов

Изображение знакомств в группе людей в виде графа.

3. Комбинаторная геометрия

Представление о равных фигурах. Задачи на поиск равных фигур на клетчатой бумаге.

Ломаная линия, многоугольник. Связь между количеством сторон и вершин многоугольника. Составление фигур из палочек, перекладывание палочек.

Организация образовательного процесса

Учащимся систематически (2–4 раза в неделю) предлагается решить «задачу дня» — нестандартную задачу по математике. Это может быть задача со звездочкой из учебников и пособий по математике для 1–2 класса курса «Учусь учиться» (Л. Г. Петерсон), а также задача, выбранная из различных источников — сборников задач для кружковой работы, заданий математических олимпиад разного уровня, пособий для внеклассной работы и т. д. Задача подбирается с учетом уровня математической подготовки учащихся с опорой на структуру содержания курса «Олимпиадной математики».

Требования к «задаче дня» следующие:

- задача должна содержать новизну — какой-то новый для детей элемент, который ранее не входил в систему обязательного тренинга на уроках математики;
- задача должна быть в зоне ближайшего развития большинства детей класса (дети *должны быть способны решить ее сами* — либо при определенном самостоятельном волевым усилии, либо с помощью подводящего диалога взрослого);
- задача должна быть красивой, не громоздкой;
- задача должна нравиться учителю (дети это тонко чувствуют) и быть интересной для детей.

В ходе решения «задачи дня» учитель, в зависимости от ситуации в классе и уровня подготовки детей, вводит в речевую практику роли «мыслителей» и коммуникативные роли «автора» и «понимающего».

Варианты организации

Для вовлечения учащихся в деятельность по решению «задачи дня» особенно важен методологический принцип *успешности* и дидактические принципы *деятельности*, *психологической комфортности*, *минимакса*, *вариативности*, *творчества*. Для их конкретизации можно использовать ана-

логию интереса детей к компьютерным играм. Почему дети с интересом играют в компьютерные игры, порой сложнейшие, а трудности решения математических задач их вдохновляют далеко не всегда?

На наш взгляд, это связано с тем, что, во-первых, в компьютерные игры дети играют по собственному желанию, их никто не заставляет. Во-вторых, никто не ругает их за то, что они не перешли на новый, более высокий уровень игры — они добиваются этого в своем индивидуальном темпе: кто-то быстрее, а кто-то медленнее. В-третьих, для того чтобы получить результат, им нужно самим придумать свой собственный способ действий, прием, чего-то добиться, что-то преодолеть, и это рождает у каждого позитивные эмоции, чувство самостоятельно одержанной победы. Четвертым существенным фактором является «похвала», поощрение за каждый успешный шаг, этап, при этом даже не важно, в чем оно выражается — в баллах, знаках, словах. Значимым для детей является также уважительное отношение сверстников и друзей к «игровым» успехам друг друга. Все это вместе приводит к тому, что дети с удовольствием играют в компьютерные игры.

Для формирования у учащихся интереса к решению «задачи дня» можно использовать аналогичные **правила**:

1) *Не заставлять, а вдохновлять* — решение задачи повышенной трудности ребенок выполняет только по своему желанию и выбору.

2) *Исключить порицание за ошибку* — уважительное отношение и поддержка любой версии ученика, фиксация в ней успехов, а не неудач (например, ученик отметил важное обстоятельство, заметил закономерность, впервые предложил собственную версию и пр.).

3) *«Задача дня» должна быть интересной и посильной (в зоне ближайшего развития) для большинства детей* — это позволит создать площадку для самостоятельных проб учащихся своих сил и создания ситуации успеха.

4) *Создать систему фиксации успехов и награждений детей (уровней/статусов)* — подобно тем, которые используются в компьютерных играх.

5) *Сделать успехи в решении «задач дня» значимыми событиями класса и семьи каждого ученика* — удовлетворение потребностей в «признании» является необходимой ступенью личностного роста каждого ребенка и важным мотивирующим фактором.

Данные и другие правила, которые может ввести учитель, основываясь на перечисленных выше принципах, должны запустить механизм выращивания у школьников интереса к

решению нестандартных задач по математике. На первых порах у детей нередко возникает лишь внешний, «спортивный» интерес, но он может помочь каждому ребенку развить свое мышление, испытать радость озарения (я смог, я добился, у меня получилось!), обрести веру в себя, привить вкус к решению математических задач ради получения удовольствия уже от самого процесса решения, наработать инструментарий, который станет основой возникновения «внутренней» мотивации.

В этом процессе перехода от внешней мотивации к внутренней принципиально важна доброжелательность, создание творческой среды, умение замечать успехи каждого ученика, их моральная поддержка в случае удачи и особенно неудачи, социализация — признание значимости достигнутых результатов в решении олимпиадных задач другими учениками класса, учителями, родителями. Поэтому система поощрений должна быть видимой для окружающих — систематически отражаться на стенде или сайте класса, в сообщениях родителям (например, в чатах сети Интернет) и т. д.

Форма проведения занятий при работе с «задачами дня» может быть самой разной, она зависит от условий работы и количества детей в классе. Первые «задачи дня» можно предлагать учащимся и разбирать на уроках математики. Когда способ работы и фиксации результатов дети освоят, можно выставлять новые «задачи дня» в специально отведенном месте — это может быть часть школьной доски, рубрика в классном уголке или стенд «Задача дня». Будет интереснее, если название дети придумают сами, например «Я — математик», «Душевная математика», «Моя математика».

Учащиеся могут решать «задачу дня» на переменах, до или после уроков, в школе или дома, самостоятельно или вместе с друзьями и даже вместе с родителями. Совместный поиск решения задач (ВМЕСТЕ, а НЕ ВМЕСТО) обогащает опыт детей, демонстрирует заинтересованность взрослых в интеллектуальной деятельности, позволяет почувствовать значимость усилий ребенка для получения общего результата, разделить с близкими людьми радость одержанной победы над трудной задачей.

Разбор решения задачи можно организовать на следующий день до начала уроков или на уроке. Учителю важно понимать, посильной ли оказалась задача, сколько детей смогли ее решить, поэтому каждому участнику (участие — по желанию) рекомендуется фиксировать свое решение на листке или в тетради, а в ходе разбора — выполнять самопроверку и самооценку («+» или «?»), при этом важно не оставить без

внимания разные варианты решения, которые могут предлагать ученики. В результате выводится новый способ действий или совет по решению задач, который вместе с правильными решениями вывешивается на стенде, а затем используется учениками для решения новых задач.

Оценивание результатов происходит в логике достижений, при этом поощряются достижения не только математические, но и личностные, например проявление интереса к задаче повышенной сложности, самостоятельно выдвинутая версия, интересная идея, попытка обосновать свое высказывание и т. д. Обсуждаются вопросы: «Что получилось?», «Что вызвало затруднение?», «Чему научился, решая (разбирая) задачу?», «Что пожелаю себе?», «За что могу похвалить себя, других?». При просмотре работ детей учитель делает пометки зеленой ручкой, отмечая их достижения (например, обводит кружком правильно выполненную самооценку «+» или «?»). Если зеленым кружком обведен знак «+», то ученик отмечает свой результат в индивидуальном листе достижений.

Учитель организует в классе ситуацию моральной поддержки учеников, которые сделали свой шаг вперед.

Заметим, что проект «Задача дня» можно реализовывать и в более старших классах с коррекцией на возрастные особенности учащихся — как с мотивационной целью, так и в случае, когда системное решение нестандартных задач (зарядка для ума) вошло у них в привычку и приобрело характер потребности.

Ознакомительный этап («Математический театр»). 3–6 классы

Цель этапа: создать для каждого учащегося 3–9 классов общеобразовательной школы возможность качественной олимпиадной подготовки по математике посредством вовлечения в самостоятельную математическую деятельность, развития мышления, мотивации, освоения методов и формирования системного опыта решения олимпиадных математических задач.

Задачи этапа

1) создать творческую, доброжелательную, безопасную (с позиций права на ошибку) образовательную среду, ориентированную на поддержку успеха каждого ученика относительно себя;

2) вовлечь учащихся на основе системно-деятельностного подхода (система «Учусь учиться») в математическую деятельность, создать возможность самостоятельного открытия ключевых методов и приемов решения математических олимпиадных задач, тренировать умение их применять;

3) снять у детей неуверенность и страх при решении нестандартных задач, создать возможность для каждого ученика системно переживать ситуацию успеха, радость победы, получать удовольствие от интеллектуальной математической деятельности;

4) сформировать у школьников умение решать нестандартные задачи на основе метода рефлексивной самоорганизации;

5) тренировать мыслительные операции, навыки парной и групповой работы, коммуникативные умения в позициях «автора», «понимающего», «критика», «организатора»;

6) создать качественное содержание олимпиадной подготовки по математике, связанное как с содержанием школьного курса математики (за основу взят курс математики «Учусь учиться»), так и с содержанием школьных математических олимпиад разных уровней (вплоть до Всероссийской олимпиады школьников).

Устойчивое мотивационное напряжение учащихся, необходимое для включения в любую коллективную деятельность (в том числе деятельность по решению олимпиадных задач), может проявиться только при условии удовлетворения таких базовых потребностей человека, как потребности в безопасности, причастности (теплых человеческих отношениях) и самоутверждении [3, с. 62]. Для создания среды, отвечающей этим требованиям, используются приведенные выше методологические и дидактические принципы «Олимпиадной математики», а также конкретизирующие их правила.

Содержание ознакомительного этапа («Математический театр»)

Содержание курса «Математический театр» также структурировано в 21 тематическую линию, которые преемственно продолжают содержание подготовительного этапа курса «Задача дня» и создают базу для его развития на практическом этапе в 7–9 классах. Согласовано с содержанием непрерывного курса математики «Учусь учиться» для 3–6 классов общеобразовательной школы.

I. АРИФМЕТИКА

1. Суммы

Приемы упрощения устного счета (сложение, вычитание): разбиение на пары. Метод дополнения до целого в клетчатых задачах. Использование связи между числовыми и геометрическими задачами для упрощения счета.

Приемы решения задач о разделении чисел на группы с равной суммой. Составление магических квадратов. Изменение суммы при изменении каждого слагаемого на некоторое

число. Метод подсчета двумя способами на примере чисел с известными попарными суммами.

Прием разбиения на пары для подсчета сумм чисел, идущих через равные промежутки. Определение четности количества чисел в ряду. Формула суммы чисел от 1 до n . Разбиение на пары групп чисел с равной суммой.

Метод подсчета двумя способами в арифметических задачах. Использование подсчета двумя способами в доказательствах «от противного», при решении задач с арифметическими таблицами, геометрических задач. Введение переменной для дальнейшего двойного подсчета.

Среднее арифметическое, его свойства (изменение при увеличении всех чисел набора на некоторое число и в некоторое число раз; оценка среднего арифметического сверху и снизу наибольшим и наименьшим числами набора; неизменность среднего арифметического при добавлении числа, равного среднему арифметическому чисел набора).

2. Числа и их свойства

Способы решения числовых и буквенных ребусов. Организация перебора с учетом принципа узких мест. Приемы решения задач на восстановление знаков действий, расстановку скобок, нахождение чисел с указанными свойствами.

Понятие решения буквенного ребуса. Метод перебора для поиска всех решений ребуса. Ограничение полного перебора с учетом принципа узких мест, свойств четности. Доказательство отсутствия решения у ребуса с помощью метода перебора, числовых оценок.

Конструкции с обыкновенными и десятичными дробями. Представление чисел в виде обыкновенных дробей с числителем 1 и разными знаменателями. Применение арифметических свойств дробей, правила сокращения дробей. Уменьшение чисел на интервале $(0; 1)$ при возведении в степень. Приемы решения задач на равномерное распределение частей между несколькими людьми.

Использование отрицательных чисел в конструкциях как метод устранения мнимых противоречий. Зависимость знака произведения от знаков множителей. Приемы решения задач на оценку и пример, связанные с отрицательными числами. Использование отрицательных чисел в задачах с числовыми оценками.

3. Закономерности

Поиск циклов в арифметических задачах. Анализ задач с повторяющимися числами, вычисление длины цикла. Определение и использование порядкового номера внутри цикла в задачах с «большими» числами.

Эффект «плюс-минус один». Использование схемы для его преодоления. Вывод формулы для определения количества натуральных чисел в промежутке с помощью интерпретации на числовой оси. Метода масштабирования для проверки формул. Использование эффекта «плюс-минус один» для устранения противоречий при решении задач.

Конструкции с предварительным анализом. Конструирование путем разбиения на аналогичные подзадачи в задачах на разрезание, составление числовых конструкций.

Последовательное конструирование (конструирование путем рассмотрения более простых задач и дальнейшего обобщения на исходную задачу). Бесконечные процессы. Понятие базовой конструкции, шага. Прием разбиения процесса на последовательность этапов, на каждом из которых изменяются свойства только одного элемента.

4. Время и движение

Приемы решения арифметических задач о промежутках времени. Учет разницы часовых поясов. Идея о задачах на движение по реке на примере задач про отстающие и спешащие часы. Конструкции в задачах про время.

Задачи на относительное движение (движение навстречу, в противоположных направлениях, *вдогонку, с отставанием*) с *неполными данными*. *Разбор случаев в задачах на движение*.

Использование нестандартных чертежей при решении задач на движение. Изображение скоростей движения в частях (единичных отрезках). Масштабирование скорости. Использование более крупных единиц времени для уравнивания расстояний.

Недельная и годовая цикличность. День недели как остаток от деления на 7. Способы построения конструкций и доказательств невозможности построения конструкций в задачах про календарь.

Движение по кругу. Изображение скоростей движения в условных единицах (дугах). Движение стрелок часов, исследование количества их пересечений. Понятие градусной меры дуги на примере углов между часовой, минутной, секундной стрелками.

II. ГЕОМЕТРИЯ

1. Геометрическое мышление

Повороты клетчатой фигуры на прямой угол, связь с симметрией. Понятие о зеркальных (но несимметричных) фигурах. Использование симметрии и поворотов фигур при реше-

нии задач на разрезание. Метод «пропеллера» для построения примеров.

Задачи на разрезание пространственных фигур. Вычисление объемов фигур, составленных из кубиков. Изменение объема фигуры, составленной из кубиков, при увеличении каждого измерения в 2 раза. Составление фигур из объемных частей.

Понятие развертки. Нахождение различных разверток куба. Способы изображения «склеивающихся» граней при изображении развертки куба. Изображение фигур, состоящих из кубиков. Три вида объемной фигуры. Восстановление объемной фигуры по трем ее видам.

Изображение многогранников по заданному количеству вершин, ребер и граней (тетраэдр, пирамида, октаэдр, усеченная пирамида). Развертки многогранников. Оклеивание объемных фигур. Пути на поверхности объемных фигур.

2. Площади

Разрезание фигур на равные части по линиям сетки и составление фигур из частей. Приемы поиска разных способов разрезания. Метод перебора, использование симметрии при поиске как можно большего количества различных разрезов одной и той же фигуры на равные части. Фигуры тетрамино, их нахождение с помощью метода перебора. Использование множества делителей числа для вычисления возможного количества частей, на которые можно разрезать фигуру.

Разрезания по линиям сетки и диагоналям клеток. Свойство аддитивности площади. Метод разбиения на элементарные части (прямоугольники, прямоугольные треугольники) и метод дополнения для вычисления площадей фигур, границы которых идут не по линиям сетки. Использование площадей фигур для определения форм частей в случае разрезания клетчатых фигур не по линиям сетки (диагоналям клеток).

Пентамино. Получение фигур пентамино из тетрамино с помощью геометрического метода перебора. Использование симметрии при решении задач на разрезание.

Введение дополнительной сетки (укрупнение или уменьшение клеток, наклонная сетка). Первичные представления о движении плоскости (параллельный перенос, поворот). Перпендикулярность на клетчатой бумаге.

Приемы решения задач на перекраивание фигур («разрежь и составь»). Равносоставленные фигуры.

Разрезание не клетчатых фигур. Введение вспомогательной сетки. Разрезание фигур на подобные. Использование вспомогательной раскраски при решении задач на разрезание. Задачи на разрезание с оценкой и примером.

3. Геометрические неравенства

Конструкции с отрезками и ломаными. Вычисление периметров фигур. Связь между длинами отрезков на прямой.

Приближенное вычисление длин ломаных и кривых с помощью нити. Подсчет количества кратчайших путей в графе. Задача о нахождении диагонали кирпича. Кратчайшие пути по граням куба, параллелепипеда.

Варианты расположения точек на прямой. Координата середины отрезка числовой прямой. Расстояние между серединами отрезков.

Неравенство треугольника. Доказательство неравенства треугольника с использованием построений. Оценка суммы длин диагоналей четырехугольника через его периметр.

III. АЛГЕБРА

1. От чисел к буквам

Метод уравнивания при решении задач с опорой на вспомогательные схемы. Метод «анализ с конца».

Прием «учти лишнее». Метод подсчета двумя способами. Связь с теорией множеств.

Выбор удобной переменной в текстовых задачах. Сравнение метода введения переменных с методом доказательства единственности решения задачи с помощью числовых оценок.

Десятичная запись (представление натурального числа в виде $a + 10b + 100c + \dots$). Признаки делимости, связанные с десятичной записью числа. Использование десятичной записи при решении буквенных ребусов и для доказательств «от противного». Сведение задачи к простейшим уравнениям в цифрах с дальнейшим перебором вариантов, использованием свойств делимости.

2. Функциональные зависимости

Использование формул при решении нестандартных текстовых задач. Формулы площади прямоугольника, объема и площади поверхности куба, прямоугольного параллелепипеда.

Доказательство формул перевода единиц измерения площади, объема. Нестандартные единицы измерения.

Понятие взаимно однозначного соответствия между множествами. Разбиение объектов на пары как пример взаимно однозначного соответствия. Использование взаимно однозначного соответствия для сравнения мощностей множеств. Примеры соответствий, не являющихся взаимно однозначными. Взаимно однозначное соответствие в простых комбинаторных задачах.

Прямая и обратная пропорциональность. Использование пропорций при решении нестандартных текстовых задач.

Свойство суммы и среднего арифметического пропорционально изменяемых чисел.

3. Неравенства и оценки

Сравнение многозначных чисел. Нахождение наибольшего или наименьшего многозначного числа с определенными свойствами. Использование правил сравнения чисел для доказательства минимальности и максимальности.

Метод перебора в арифметических задачах. Перебор по количеству объектов одного из двух типов. Задачи про «ноги и головы». Оценки, основанные на изменении количества объектов одного типа на единицу. Четность как инструмент упрощения перебора и доказательства невозможности.

Оценки величины «сверху» и «снизу». Ограничение перебора с помощью оценок. Двусторонние оценки как метод доказательства единственности ответа. Простейшие действия с неравенствами. Оценки, связанные с делимостью. Решение двойных неравенств с натуральными числами.

Транзитивность неравенств. Использование промежуточного числа (посредника) для доказательства числовых неравенств. Использование нескольких посредников. Уменьшение чисел на интервале $(0; 1)$ при возведении в степень.

IV. ТЕОРИЯ ЧИСЕЛ

1. Делимость

Вывод признака делимости на 2 с помощью числового луча и заикливания последней цифры. Изменение последней цифры числа при сложении, вычитании, умножении. Доказательство четности и нечетности суммы и разности двух чисел.

Четность или нечетность суммы нескольких чисел. Доказательство с помощью разбиения на пары. Использование соображений четности при решении задач на доказательство для упрощения перебора вариантов.

Делимость и ее свойства. Доказательство признаков делимости на 2, 4, 8, 5, 25, 10, 3, 9, их обобщение. Отсутствие обобщения признака делимости на 9 на признак делимости на 27.

Разложение натурального числа на простые множители. НОД и НОК. Простые числа. Делимость как инвариант.

Другие признаки делимости, связанные с десятичной записью числа (на 7, 11, 13 и др.).

Задачи на оценку и пример, связанные с признаками делимости: нахождение минимального числа с указанными свойствами делимости, числа с наименьшей суммой цифр.

Каноническое разложение натурального числа. Степень вхождения простого делителя. Четность степеней вхождения простых множителей в каноническое разложение точного квадрата.

2. Остатки

Признак делимости на 10. Последняя цифра как остаток от деления на 10. Правила изменения последней цифры при арифметических операциях (сложение, вычитание, умножение).

Повторяемость на числовом луче чисел, делящихся на n . Повторяемость чисел, дающих определенный остаток при делении на n .

Способ определения остатка числа, связанный с соответствующим признаком делимости. Делимость на n разности числа и его остатка от деления на n . Сумма цифр. Делимость разности числа и его суммы цифр на 3 и 9. Раскладывание числа на разное количество частей с данным остатком.

Остатки от деления целых чисел на натуральные. Общий вид числа с определенным остатком при делении на число. Арифметические свойства остатков. Задачи на остатки с доказательством по принципу Дирихле. Зацикливание остатков степеней.

V. ЛОГИКА

1. Математическая логика

Понятие об истинном и ложном высказывании. Составление высказываний и вопросов с определенными свойствами. Перебор двух вариантов в логических задачах.

Рыцари и лжецы. Отрицания элементарных высказываний. Перебор вариантов по роли (рыцарь/лжец). Представление перебора в виде таблицы, дерева вариантов. Высказывания о логическом следовании.

Логические задачи с неединственным ответом. Перебор, использующий высказывания о существовании и всеобщности. Отрицание высказываний о существовании и всеобщности. Отрицание высказываний с «больше», «меньше», «больше или равно», «меньше или равно».

Метод «от противного». Логические таблицы. Отрицание высказываний с «и», «или», более сложных высказываний. Логические задачи на оценку и пример.

Доказательства, использующие чередование объектов. Расположение объектов по кругу.

2. Принципы решения задач

Представление условия задачи в виде нестандартного чертежа. Геометрические интерпретации логических и арифметических задач.

Малые случаи. Разделение задачи на эквивалентные подзадачи. Составление блоков из элементов разбиения. Задачи с повторяющимися объектами. Метод проверки ответа (закономерности) на малых случаях.

Анализ задачи с конца (обратный ход) в арифметических и логических задачах. Сравнение с методом введения переменной. Табличное представление анализа с конца. Рассмотрение последнего шага процесса, его использование для доказательства в логических задачах.

Задачи с вопросом «сколько нужно взять?». Использование отрицаний элементарных высказываний при решении задач.

Формальное введение принципа Дирихле. Связь с доказательством «от противного». Обобщения принципа Дирихле. Принцип Дирихле в геометрических задачах. Остатки и принцип Дирихле.

3. Алгоритмы и конструкции

Переливания (задачи на отмеривание определенного количества жидкости с помощью двух или более емкостей и источника воды). Табличная форма записи шагов алгоритма. Укрупнение шагов алгоритма при наличии повторяющихся групп действий (идея алгоритмических циклов).

Переправы. Организация перебора в задачах на переправы, удобная форма записи решения. Идея промежуточных обратных действий для работы алгоритма (перевоз объекта обратно).

Составление алгоритмов угадывания с помощью вопросов, на которые можно ответить только «да» или «нет». Доказательство несостоятельности алгоритма, позволяющего при одинаковых начальных данных получить различные ответы.

Взвешивания. Составление алгоритмов определения фальшивых монет с помощью взвешиваний. Прямая и косвенная информация. Понятие о количестве информации. Доказательство невозможности построения алгоритма при недостаточном количестве взвешиваний. Задачи на испытания с другими сюжетами.

4. Игры и стратегии

Понятие математической игры для двух игроков на примере игр с шахматными фигурами на досках. Игры-шутки, в которых победитель зависит только от количества раундов. Формирование представления о выигрышных позициях.

Понятие выигрышной стратегии. Математические игры с полной информацией. Использование дерева перебора для доказательства верного выбора стратегии.

Симметричная стратегия в играх. Доказательство симметричной стратегии. Симметричная стратегия с «центром». Примеры неверного использования симметричной стратегии.

Выигрышные позиции как метод конструирования стратегии.

Игры на опережение. Игры, в которых один игрок может гарантировать себе «ничью».

VI. КОМБИНАТОРИКА И ТЕОРИЯ МНОЖЕСТВ

1. Комбинаторика

Использование схем (графов) для удобства подсчета количества связей (дорог, рукопожатий). Доказательства невозможности построения графа с определенным количеством связей. Подсчет общего количества игр в однокруговом турнире. Связь между прямым подсчетом числа связей по схеме и двойным подсчетом через суммарное количество выходящих «связей».

Дерево вариантов для решения комбинаторных задач. Переход от дерева вариантов к правилу произведения (правилу «И»). Подсчет количества чисел с определенными свойствами.

Правило суммы (правило «ИЛИ») и правило произведения (правило «И»), определение ситуаций для использования каждого правила. Задачи, требующие использования комбинации этих правил.

Перестановки без повторений и с повторениями на примере анаграмм слова. Вывод формулы для числа перестановок из правила произведения. Факториал и его свойства. Перестановки с повторениями. Вывод формулы.

2. Теория множеств

Диаграмма Эйлера — Венна для двух, трех и более множеств. Пересечение и объединение множеств, различные методы подсчета количества элементов в пересечении и объединении на готовых диаграммах.

Введение вспомогательной диаграммы для решения задачи. Работа с множествами с неизвестным количеством элементов. Логические задачи на множества, связанные с долями и дробями.

Метод дополнения в задачах. Использование кругов Эйлера и метода дополнения в комбинаторных задачах, в том числе для вычисления количества чисел в диапазоне, делящихся или не делящихся на какие-то числа.

Метод введения переменной при решении задач про множества.

VII. КОМБИНАТОРНАЯ ГЕОМЕТРИЯ

1. Раскраски и разбиения

Раскраски досок. Конструирование примера раскраски доски с указанными свойствами. Задачи-соревнования на раскраску досок в наибольшее и наименьшее количество цветов. «Правильная» раскраска. Раскраска географической карты как пример «правильной» раскраски.

Чередование объектов как частный случай «шахматной» раскраски. Чередование объектов в ряду, по кругу. Относительное количество чередующихся объектов. Четность суммы чисел в промежутке. Связь чередования и разбиения на пары. Разрезания шахматной доски. Идея использования заданной шахматной раскраски в доказательствах.

Шахматная раскраска досок, ее использование для оценок и доказательств. Обобщение шахматной раскраски на другие объекты. Шахматная раскраска ребер и граней куба. Принцип Дирихле в задачах с раскраской. Использование раскраски для нахождения и доказательства единственности примера.

Виды раскрасок клетчатых досок в два и более цвета. Раскраска полосами, диагональная раскраска в несколько цветов, «крупная» шахматная раскраска. Доказательство невозможности разрезания на основе раскраски.

2. Теория графов

Изображение графов. Граф как способ удобного представления связей между объектами. Изоморфизм графов. Различные способы изображения связей. Неориентированные и ориентированные связи.

Исследование возможности нарисовать фигуру одним росчерком. Теорема Эйлера как формальный способ проверить, можно ли нарисовать фигуру одним росчерком. Нечетность степеней вершин как способ выявления концов пути.

Полный граф. Количество ребер в полном графе. Графы шахматных фигур и количество ребер в них. Двудольный граф как модель связей между объектами двух типов. Представление турнира в виде графа.

Формальное определение графа. Вершины, ребра, степени вершин. Лемма о рукопожатиях как способ подсчета количества ребер в графе через сумму степеней вершин. Свойство четности количества вершин нечетной степени в графе. Лемма о хороводах.

3. Комбинаторная геометрия

Взаимное расположение точек и отрезков на плоскости. Точки и отрезки, лежащие на одной прямой. Идея об увеличении количества частей при разрезании невыпуклых фигур.

Разрезание фигур на части с определенным числом сторон. Разрезание на части, не образующие прямоугольники. Задачи на объединение фигур.

Покрытие плоскости одинаковыми фигурами (паркеты). Понятие о многоугольнике. Паркеты в форме правильных многоугольников (треугольники, квадраты, шестиугольники). Замощение клетчатými фигурами. Замощение многоугольниками неправильной формы. Замощение невыпуклыми многоугольниками. Задачи о наиболее плотной укладке.

Невыпуклые фигуры как средство преодоления мнимых противоречий. Задачи о пересечении фигур.

Роли в «Математическом театре»

В «Математическом театре» дети учатся перевоплощаться в роли, которые помогают им осваивать содержание и методы олимпиадной математики.

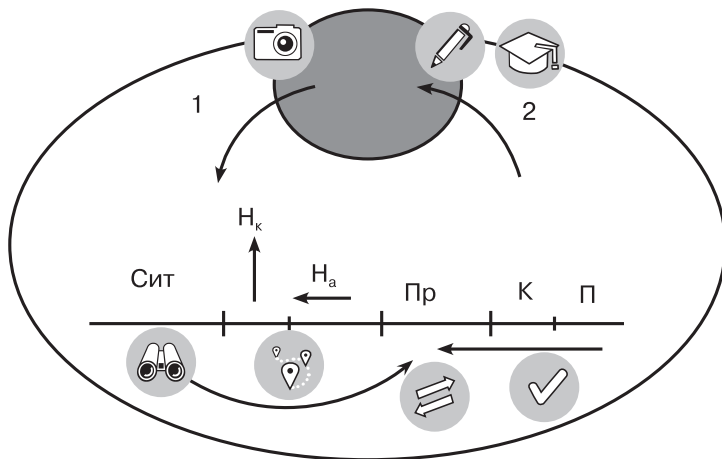
Прежде всего это **7 основных «ролей мыслителей»**, которые образно описывают мыслительные действия, выполняемые при решении любых интеллектуальных задач.

Так, при решении любой задачи ученик должен внимательно прочитать и понять условие, выделить элементы, вопросы и внетекстовую информацию (диаграммы, схемы и т. д.), построить образ задачи в целом, то есть сделать ее «фотографию». Чтобы помочь детям выполнить соответствующие мыслительные действия, этому этапу решения задачи сопоставлен образ **фотографа**, который ассоциируется у детей со знакомыми жизненными ситуациями. Благодаря этому учащиеся становятся субъектами задачи (участниками, а не просто внешними наблюдателями).

Аналогично роль **разведчика** учит детей устанавливать свойства элементов задачи и связи между ними, роль **переводчика** — делать перевод условия задачи на математический язык (строить математическую модель — выражение, схему, таблицу, уравнение, граф и т. д.), роль **навигатора** — строить план решения задачи, роль **мастера** — выполнять построенный план, а также аккуратно и понятно для других фиксировать полученный результат, роль **эксперта** — проверять правильность решения, роль **магистра** — проводить рефлексию решения, фиксировать достижения и то, что можно улучшить.

Данные роли выведены не случайным образом, а на основе соотнесения мыслительных процессов, протекающих при решении нестандартных задач, с расширенным циклом РСО [2, с. 38].

PCO, расширенный цикл («4 доски»)




где 1 — выход из действия, в котором возникло затруднение; Сит — ситуационная реконструкция и анализ прошедшего действия; К, П — построение концепции (К) «случая» на базе имеющегося аппарата понятий и категорий (П) и с учетом результатов ситуационного анализа; Пр — использование построенной концепции для проблематизации прошлого опыта; H_a — использование концепции и знания проблемы для построения абстрактной нормы («стратегии»); H_k — конкретизация абстрактной нормы деятельности («тактика»); 2 — возврат в действие.

Для того чтобы грамотно зафиксировать свое затруднение при решении нестандартной задачи, ученик должен прежде всего прочитать текст, «погрузиться» в описанную ситуацию и точно определить условие и вопрос задачи. Чтобы сделать понятным для учащихся это внутреннее мыслительное действие, «овнешнить» его, оно соотносится с образом *фотографа*, который на фотографии точно отображает реальную картинку (📷 — стрелка 1).


В случае возникновения затруднения при решении задачи ученику необходимо провести анализ описанной в ней ситуации, выявить связи между условиями и требованиями, которые определил фотограф, и понять, в каком направлении двигаться — какие из имеющихся знаний помогут построить модель. Для перевода этих мыслительных действий во внешний


план используется образ *разведчика* (🔍 — Сит), который,


с одной стороны, устанавливает взаимосвязи между элементами задачи, а с другой — *высказывает идеи и предположения о последующем выборе или создании модели.*


Поиск решения задачи начинается с построения модели, то есть «перевода» текста задачи на математический язык (при этом может быть использована известная модель либо построена новая — своя собственная). Мыслительные шаги по построению математической модели осуществляет переводчик ( — Пр). Его миссия состоит в

том, чтобы в наглядной (графической, знаковой, табличной) форме показать условия и вопрос задачи, а также все существенные взаимосвязи между ее элементами. Таким образом, поиск решения выводится на уровень: «знаю что, но не знаю как» (проблематизация). В ходе построения модели переводчик определяет, какие знания из имеющихся в арсенале у учащихся (К, П) помогут проложить путь к решению задачи.

Далее навигатор ( — Н_а, Н_к) определяет общий подход к решению задачи, уточняет ключевые факты из теоретической базы (определения, свойства, теоремы), которые будут использоваться для решения задачи, и на их основании выстраивает план решения.

Осуществляет этот план и аккуратно, грамотно, понятно для других записывает решение мастер ( — стрелка 2). В завершение эксперт, опираясь на критерии

( — К, П), проверяет правильность решения. Магистр

( — РСО) проводит рефлексию решения, отвечая на вопросы:

- Что получилось?
- Что можно было улучшить?
- Какие выводы можно сделать?

Роли мыслителя вводятся на отдельном, специально отведенном для этого занятии (с учетом возрастных особенностей детей). Полученные **ключи ролей** (средства, помогающие ученику в достижении целей соответствующей роли) фиксируются в таблице (см. Приложение), которую школьники могут использовать в дальнейшем при решении задач (подготовке «спектаклей»).

Дополнительно к ролям мыслителя вводятся **роли коммуникативного взаимодействия**, ведь умение работать в команде, кратко и четко излагать свои мысли, слушать и слышать других, адекватно понимать их высказывания, согласовывать свою позицию с другими необходимо сегодня в любом деле. При работе по курсу «Математический театр» учащиеся имеют возможность систематически тренироваться в исполнении коммуникативных ролей *автора, понимающего, критика и организатора*, которые описаны в схеме коммуникации ММПК (О. С. Анисимов) [4, с. 281–282].

По инициативе и желанию детей и учителя на занятиях можно использовать в мотивационных целях ролевые ситуации, переносясь в разные страны, временные периоды, литературные произведения и кинофильмы — это не является целью и ключевым моментом «театрализации» в рамках курса, но при условии интереса и желания детей может работать на их внешнюю мотивацию.

Технология «Математический театр»

Технология «Математический театр» — это модификация технологии деятельностного метода (ТДМ) для развития интеллектуальных способностей школьников в ходе освоения олимпиадной математики. Одновременно данная технология помогает детям освоить рефлексивный метод преодоления трудностей и стратегии решения нестандартных математических задач, включает творческий эмоциональный компонент через ролевую игру, перевоплощение, командную работу, соревновательность, переживание радости побед.

Каждое отдельное занятие в этой технологии — это постановка нового спектакля, у которого есть свое название (тема занятия), сценаристы (учитель и авторский коллектив проекта), сценарий (задачи, которые предстоит решить), режиссер (учитель). Ученики выступают во всех ролях — они и актеры, и зрители, но при этом сценаристы и режиссеры своих выступлений, в ходе которых они представляют построенные ими решения задач.

«Математический театр» — это своеобразный спектакль-форум, элементами которого являются мини-спектакли детей.

ЭТАП 1. «Математическое фойе»

Обычно в театральном фойе зрители погружаются в атмосферу театра и внутренне готовятся к спектаклю. В Математическом фойе также идет подготовительная работа. При этом учащиеся проходят этапы 1–5 ТДМ.

Занятие начинается с мотивации к учебной деятельности на основе механизма «надо» — «хочу» — «могу». Чтобы за-

интересовать учеников, учитель в течение 1–3 минут погружает их в тему занятия с помощью некоторой жизненной ситуации, побуждающей повторить ранее изученный материал, который подготовит их к освоению/открытию нового знания.

Затем учащиеся знакомятся с новыми приемами и способами решения олимпиадных задач. Учитель предлагает **ключевую задачу** — это новая для школьников задача по теме занятия, которая помогает вывести «советы» (содержательный ориентир для решения задач, включенных в занятие).

Ключевая задача решается под руководством учителя, при этом в ходе ее решения может использоваться как подводящий диалог, так и организация самостоятельных открытий детей на основе РСО. Если в ходе решения ключевой задачи возникает затруднение, используется метод ролей: роли мыслителя переводят внутренние мыслительные действия во внешний план и таким образом помогают учащимся найти путь решения.

В завершение дети обобщают свои действия и фиксируют собственные версии «совета» карандашом в учебном пособии (этот шаг важен, так как он пробуждает в учениках желание узнать, как правильно). После озвучивания и согласования версий, дети аккуратно дописывают «совет» ручкой, а затем на основе этого формулируют *тему* и *цель* занятия.

ЭТАП 2. «Творческая мастерская»

Представлению спектакля на сцене театра предшествует творческая работа труппы актеров под руководством режиссера. На репетициях актеры осваивают новые роли, приемы и техники, совершенствуют свое мастерство перевоплощения, размышляют, фантазируют.

В Творческой мастерской школьники распределяются в группы по 4–6 человек (актерские труппы), каждой из которых предлагается свой сценарий — олимпиадная задача из данного раздела, соответствующая уровню подготовки группы (такая возможность предусмотрена в учебных пособиях по данному курсу).

В течение 4–5 минут группы пытаются самостоятельно выполнить полученное задание, распределяясь по ролям и опираясь на метод РСО. При этом они могут пользоваться подсказками или обратиться за помощью к учителю. Решение дети фиксируют на черновиках и готовят его представление на сцене «Математического театра».

ЭТАП 3. «Сцена»

Каждая группа («актеры») представляет свой мини-спектакль (вариант решения) перед всеми участниками («зрителями»). На сцену может выйти один участник группы («мо-

носпектакль») или несколько (спектакль разыгрывается «по ролям»).

Перед тем как представить решение, актер должен дать зрителям некоторое время на знакомство с задачей: пересказать условие, начертить схему или рисунок, чтобы каждый участник «спектакля» качественно сыграл роль фотографа — «погрузился» в условие задачи, сделал его «своим».

Задача актера (или актеров) — донести до зрителей суть содержания и решения своей задачи. Возможно, он расскажет, какие вопросы себе ставил.

Задача зрителей — посмотреть спектакль, не перебивая актера, вникнуть и понять предлагаемый способ решения.

Если несколько групп решали одну и ту же задачу, то после выступления первой группы участники каждой из остальных групп уточняют решение методом дополнения (не представляя его заново, а при необходимости уточняя какой-то элемент: формулировку условия и вопроса, построенную модель, способ решения и проверки, ответ и т. д.). При этом зрители могут задать актерам в коммуникативной форме вопросы на понимание («Правильно ли я понял(а), что ...?»). Таким образом, учащиеся получают ценный опыт выступлений, презентации своих идей и их обсуждения в форме коммуникативного взаимодействия.

Представленное решение уточняется (либо, если оно не получено, отыскивается) с помощью подводящего диалога. Возможность ответа представляется сначала членом группы (или групп), решавших данную задачу, а если потребуются — всем участникам. Разбираются разные варианты решения, и согласованный способ учитель фиксирует на доске, а дети аккуратно записывают ручкой. Так они постепенно создают для себя «умный решебник», который поможет им при подготовке к математическим соревнованиям разного уровня.

По окончании спектакля звучат аплодисменты как знак признания (в случае успеха выступления) или поддержки (в случае неудачи). А если спектакль восхитил и впечатлил зрителей, то могут звучать даже возгласы «браво!».

ЭТАП 4. «Антракт»

Данный этап является аналогом этапа 6 уроков в ТДМ — первичное закрепление с проговариванием во внешней речи, — который является необходимой ступенью прочного усвоения знаний (П. Я. Гальперин). Учитель просит школьников проговорить вслух в группах приемы решения задач по выбранной теме, которые они открыли и научились применять.

После этого он с помощью подводящего диалога проводит рефлексию решения задач, фиксирует достижения учащихся и то, что можно улучшить. Постепенно, по мере взросления

детей проведение рефлексии решения переходит к учащимся, выступающим в роли *магистра*.

В завершение учитель подводит итог всех выступлений и создает в классе ситуацию успеха, которую также можно поддерживать аплодисментами в поддержку позитивных результатов, полученных на занятии.

ЭТАП 5. «Выход на бис»

Все дети получают возможность «выступить на бис» — выбрать себе для тренинга 1–2 тренировочных задания, аналогичных решенным на занятии, а затем проверить себя в разделе «Варианты решений и ответов».

Данный этап соответствует этапу 7 уроков в ТДМ — самостоятельная работа с самопроверкой по эталону, — где новое знание переходит у учащихся во внутренний план, что является необходимым этапом процесса его формирования, усвоения (П. Я. Гальперин).

ЭТАП 6. «Зеркало»

Это этап рефлексии деятельности на занятии. Учитель побуждает детей провести самоанализ своей работы, отвечая на вопросы:

— Какую цель вы сегодня ставили на занятии? Достигли ли вы этой цели?

— Что нового вы узнали? Чему научились?

— Какие задачи получились? Какие нет?

— Какие задачи показались сложными? Какие понравились?

— Какие роли помогли вам лучше понять решение задач?

— Кто в ходе представления задач был сегодня в роли «автора», «понимающего»? Какая из этих ролей вам больше нравится?

— Довольны ли своей работой? Как можно ее улучшить?

— Какие личные победы сегодня удалось одержать? Кто хочет о них рассказать?

— С каким настроением вы сегодня решали задачи? Нарисуйте свое отражение в зеркале.

— Определите свое отношение к задачам с помощью согласованных значков («царская», «легкая», «сложная», «красивая» и т. д.).

«За кулисами»

Для детей, которые работают быстрее и, решив все задания на занятии, хотят потренироваться дома, предлагаются дополнительные задания, как правило, более высокого уровня сложности.

Итак, при работе в технологии «Математический театр» учащиеся на системной основе осваивают стратегии, методы и приемы решения олимпиадных задач по математике, учат-

ся не бояться трудностей, преодолевать их на основе метода РСО, работать в команде. Вводимые роли переводят внутренние мыслительные действия по решению любых нестандартных задач на уровень знакомых детям жизненных образов, помогают им грамотно работать с текстами, наполняют процесс решения олимпиадных математических задач соревновательностью и позитивными эмоциями.

Технология «Математический театр» может использоваться не только в коллективной, но и в индивидуальной работе с детьми. В этом случае взрослый играет роли режиссера, члена группы по поиску решения задач (актерской группы) и роль зрителя.

Практический этап. 7–9 классы

Содержание этапа

Содержание практического этапа курса «Олимпиадная математика» по каждой из 21 тематических линий преемственно продолжает содержание ознакомительного этапа «Математический театр». Согласовано с содержанием непрерывного курса математики «Учусь учиться» для 7–9 классов общеобразовательной школы.

I. АРИФМЕТИКА

1. Суммы

Телескопическое суммирование. Суммы с переменными пределами. Использование формул сокращенного умножения (разность квадратов, кубов), разложения многочленов на множители при вычислении сумм.

Последовательности. Числа Фибоначчи как пример рекуррентного соотношения. Свойства чисел Фибоначчи, связанные с суммированием. Примеры задач, при решении которых возникает последовательность Фибоначчи.

Применение арифметической, геометрической прогрессий и их свойств при решении задач. Понятие о рекуррентных соотношениях.

2. Числа и их свойства

Определение рационального числа. Доказательство рациональности периодических дробей. Конструкции с рациональными числами.

Определение иррационального числа. Доказательство иррациональности чисел на примере числа $\sqrt{2}$. Сопряженные иррациональные числа. Умножение выражения на сопряженное. Рациональность и иррациональность суммы, разности, произведения и частного иррациональных чисел. Иррациональность бесконечных непериодических десятичных дробей.

Приложения иррациональных чисел. Иррациональность в алгебраических задачах. Связь между диагональю и стороной квадрата. Невозможность построения правильного треугольника с вершинами в узлах сетки. Применение идей о рациональности и иррациональности в геометрических задачах.

3. Закономерности

Обобщение числовой задачи на задачу с переменным количеством элементов. Формулы числовых закономерностей. Введение формул закономерностей при подсчете количества объектов в арифметических, геометрических, логических и комбинаторных задачах.

Метод математической индукции. Формальное введение метода. База, шаг индукции. Доказательство алгебраических равенств (формул закономерностей) с помощью метода математической индукции. Задачи с шагом, отличным от 1.

Более сложные схемы математической индукции. Индукция со ссылкой на несколько предыдущих элементов. Возвратная схема математической индукции, примеры неправильного применения метода математической индукции. Использование метода математической индукции при решении геометрических, комбинаторных, комбинаторно-геометрических, теоретико-числовых задач.

4. Время и движение

Относительное движение. Переход в систему координат, связанную с одним из объектов, движущимся по прямой или по окружности. Движение мимо протяженных объектов. Движение по реке. Задачи о движущемся эскалаторе.

Задачи на движение с несколькими переменными. Применение неравенства Коши о среднем арифметическом и среднем геометрическом для двух чисел, неравенства Штурма в задачах на движение.

Сведение текстовых задач (на движение, совместную работу и т. д.) к линейным и нелинейным системам с несколькими переменными.

II. ГЕОМЕТРИЯ

1. Геометрическое мышление

Задачи на построение. Решение нестандартных задач на построение, нахождение ГМТ. Использование симметрии в задачах на построение. Построение кратчайших путей. Биссектрисы, серединные перпендикуляры как ГМТ.

Решение задач, использующих дополнительные построения: удвоение медианы, откладывание равного отрезка на продолжении стороны («спрямление»), построение середины отрезка, проведение высот, вспомогательной окружности.

Движения плоскости и их использование при решении геометрических задач. Центральная, осевая и скользящая симметрия. Поворот. Параллельный перенос. Гомотетия, поворотная гомотетия.

2. Площади

Формула площади треугольника. Вывод формулы площади произвольного треугольника с вершинами в узлах сетки. Вывод формулы площади произвольного треугольника с помощью метода дополнения. Вычисление площадей фигур с помощью разрезов на элементарные части (прямоугольники и треугольники).

Метод трансформации площадей, основанный на формуле площади треугольника.

Формула Пика для вычисления площадей многоугольников с вершинами в узлах сетки. Ее доказательство методом математической индукции и применение в задачах.

3. Геометрические неравенства

Неравенство треугольника и дополнительные построения. Использование дополнительных построений при доказательстве геометрических неравенств. Задача о нахождении кратчайшего пути между двумя точками, находящимися по одну сторону от заданной прямой, касающегося этой прямой. Более сложные задачи о кратчайших путях, использующие симметрию и неравенство треугольника.

Неравенство ломаной как обобщение неравенства треугольника. Теорема о монотонности периметра: если внутри одного треугольника находится другой, то периметр внутреннего треугольника меньше периметра внешнего.

Случаи в геометрических задачах. Доказательство правильности дополнительного построения.

4*. Аналитические методы в геометрии

Теорема Пифагора. Доказательства теоремы, основанные на свойствах площадей фигур. Применение теоремы Пифагора при решении задач на разрезание.

Декартовы координаты на плоскости. Метод координат для решения геометрических задач. Векторы, их свойства. Использование векторов в геометрических доказательствах.

Теоремы синусов и косинусов. Их применение в геометрических доказательствах.

III. АЛГЕБРА

1. От чисел к буквам

Алгебраические преобразования. Понятие об одночлене, многочлене. Разложение многочленов на множители. Формулы сокращенного умножения и их применение при решении задач.

Многочлены с целыми коэффициентами, их свойства. Свойства коэффициентов многочлена. Теорема Виета для квадратного трехчлена.

Квадратный трехчлен, его свойства.

Доказательство теоремы Безу для многочленов, ее использование при решении задач. Понятие асимптотики на примере зависимости поведения многочлена от знака его старшего коэффициента. Теорема Виета.

2. Функциональные зависимости

Линейная функция. Свободный член и угловой коэффициент, их геометрический смысл. График линейной функции. Точки с целочисленными координатами на прямой. Использование свойств линейной функции при решении нестандартных задач.

Квадратичная функция. Геометрический смысл коэффициентов. График квадратичной функции.

Использование свойств непрерывности графиков функций для решения задач.

Распознавание функций по их свойствам и значениям. Интерполяционные многочлены.

3. Неравенства и оценки

Доказательство неравенств. Неотрицательность квадрата числа. Выделение полных квадратов. Неравенство о средних арифметическом и геометрическом для двух чисел. Неравенство о сумме квадратов трех чисел и их попарных произведениях.

Сведение неравенств к уже известным. Неравенства о средних для двух чисел.

Транснеравенство, неравенство Чебышева. Симметрические и циклические неравенства.

Неравенство Коши — Буняковского — Шварца. Способы его доказательства. Лемма Титу.

Общий случай неравенства о средних. Метод Штурма доказательства неравенств. Доказательство классических неравенств с помощью метода Штурма.

IV. ТЕОРИЯ ЧИСЕЛ

1. Делимость

Алгоритм Евклида. Свойства НОД и НОК. Теорема о линейном представлении НОД, ее использование для нахождения частного решения линейных диофантовых уравнений.

Нелинейные уравнения в целых, неотрицательных, натуральных числах. Использование степеней вхождения простых чисел. Метод бесконечного спуска. Использование сравнений по модулю. Применение разложения на множители, выделения полного квадрата, других ФСУ.

Мультипликативные функции. Функция Эйлера, простейшие примеры вычисления функции. Связь с МТФ. Теорема Эйлера.

2. Остатки

Перебор по остаткам. Остатки квадратов при делении на 3, 4, 5, 7, 8, 9.

Сравнения по модулю. Свойства сравнений. Вопрос о делении сравнений. Сравнения как удобный метод записи перебора по остаткам.

Решение сравнений через сведение к линейным диофантовым уравнениям. Решение линейных диофантовых уравнений.

Малая теорема Ферма. Доказательство через остатки произведений при делении на p . Доказательство по индукции. Теорема Вильсона. Применение МТФ и теоремы Вильсона в задачах теории чисел.

Теория чисел на окружности. Первообразный корень. Порядок (показатель) числа по модулю, его свойства. Классы вычетов. Доказательство МТФ через показатели. Доказательство МТФ через системы вычетов.

V. ЛОГИКА

1. Математическая логика

Приемы решения логических задач на оценку и пример. Доказательства, использующие раскраску объектов и разбиение на группы. Отрицание логического следования.

Использование принципа крайнего при решении логических задач. Логические формулы, их использование для построения отрицаний. Законы де Моргана. Таблицы истинности.

Графы в логических задачах. Примеры комбинированных логических задач, связанных с другими областями математики.

2. Принципы решения задач

Принцип узких мест как инструмент конструирования примеров, доказательства утверждений (в том числе в комбинации с другими методами, такими как метод «от противного»). Рассмотрение наибольшего или наименьшего числа в ряду, упорядочивание. Геометрический принцип крайнего.

Процессы. Инвариант как метод доказательства утверждений, выяснения результата процесса. Инварианты, связанные с теорией чисел (делимость, остатки). Инварианты в геометрических задачах. Раскраска как инвариант.

Полуинвариант, сравнение с инвариантом. Нахождение полуинварианта как метод доказательства конечности процесса. Сумма и произведение чисел как полуинвариант. Полуинварианты в комбинаторной геометрии, теории графов, геометрических задачах.

3. Алгоритмы и конструкции

Понятие о «жадном» алгоритме. «Жадный» алгоритм как метод построения примера, доказательства минимальности или максимальности. Использование «жадного» алгоритма при постепенном конструировании. Отклонение от «жадности».

Составление алгоритмов, работающих вне зависимости от промежуточных результатов работы алгоритма. Связь с системами счисления. Примеры таких алгоритмов в задачах на взвешивания, угадывание, в задачах на клетчатых досках.

Обобщение методов доказательства невозможности построения алгоритма при определенных условиях. Оценка сложности алгоритмов.

4. Игры и стратегии

Стратегия предварительного разбиения ходов на пары в математических играх для двух игроков, связь с темой «Соответствия». Разбиение на пары во время игры. Стратегии создания «заповедников».

Неконструктивное доказательство существования стратегии.

Игры на графах. Использование двоичной системы счисления в теории игр. Игра Ним.

VI. КОМБИНАТОРИКА

1. Комбинаторика

Размещения с повторениями и их использование при решении задач. Размещения без повторений. Вывод формулы и ее запись в виде отношения факториалов.

Число сочетаний и его связь с числом размещений. Вывод формулы. Комбинаторное и алгебраическое доказательства равенств для числа сочетаний.

Свойства чисел сочетаний. Вывод формулы шаров и перегородок. Взаимно однозначные соответствия в комбинаторике. Идея кодирования задач. Комбинаторные задачи с множествами.

Бином Ньютона, треугольник Паскаля, связь между ними. Их применение при решении задач.

2. Теория множеств

Формула включений-исключений для трех множеств.

Обобщение формулы включений-исключений на несколько множеств. Комбинаторное доказательство. Применение формулы включений-исключений при решении задач комбинаторной геометрии.

Индукционное доказательство формулы включений-исключений. Использование изоморфизма множеств для упрощения подсчета числа вариантов.

VII. КОМБИНАТОРНАЯ ГЕОМЕТРИЯ

1. Раскраски и разбиения

Разбиение на группы объектов двух типов, расположенных по кругу. Разбиение досок на части для доказательства оценок. Подсчет общего количества разбиений.

Определение правильных вершинной и реберной раскрасок. Двудольный граф как пример графа, раскрашиваемого в два цвета.

Хроматическое число графа. Планарные (плоские) графы, их связь с картами. Проблема четырех красок. Формула Эйлера для связного плоского графа.

2. Теория графов

Связность графа, компоненты связности. Циклы в графах. Дерево, его определения и свойства. Зависимость минимального количества ребер в графе от числа компонент связности.

Двудольные графы. Критерий двудольности.

Выделение остовного дерева. Подвешивание графа. Дополнительный граф. Использование графов в теории чисел, комбинаторной геометрии.

Ориентированные графы, их свойства и область применения.

Критерий существования эйлерова пути, эйлерова цикла в графе. Разбиение произвольного графа в объединение простых путей и непересекающихся циклов. Гамильтонов путь, гамильтонов цикл в графе. Существование гамильтонова пути в полном ориентированном графе. Примеры графов без гамильтоновых циклов.

3. Комбинаторная геометрия

Раскраски плоскости с определенными свойствами. Задачи о нахождении одноцветных и разноцветных точек на определенном расстоянии. Раскраски паркетов. Раскраска объемных фигур.

Определение выпуклого множества. Различные определения выпуклых многоугольников, их эквивалентность. Понятие о триангуляции. Лемма о диагонали. Триангуляция произвольного многоугольника. Доказательство формул суммы градусных мер внутренних и внешних углов многоугольника. Связь триангуляций с деревьями. Лемма о наличии в триангуляции двух треугольников с двумя сторонами, совпадающими со сторонами многоугольника.

Опорная прямая многоугольника. Выпуклая оболочка системы точек. Построение выпуклой оболочки. Использование при решении задач и доказательстве утверждений.

ПЛАНИРУЕМЫЕ ПРЕДМЕТНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ ОСВОЕНИЯ КУРСА

Подготовительный этап («Задача дня»). **1–2 классы**

1 класс

К концу обучения в первом классе обучающийся научится:

I. АРИФМЕТИКА

1. Суммы

- восстанавливать пропущенные числа и знаки в примерах на сложение и вычитание (до 4 знаков, 5 чисел);
- выполнять творческие задания по составлению примеров на сложение и вычитание с пропусками чисел и знаков;
- использовать приемы упрощения устного счета при сложении и вычитании чисел: арифметические законы и прием дополнения числа до круглого;
- применять зависимость изменения результатов сложения и вычитания от изменения компонентов для упрощения вычислений;
- использовать числовой луч в качестве инструмента при решении арифметических задач повышенной сложности.

2. Числа и их свойства

- решать примеры на сложение и вычитание, составленные с помощью спичек;
- находить несоответствия в равенствах, составленных из спичек, и устранять их;
- использовать римские цифры, выполнять сравнение, сложение и вычитание с ними;
- распознавать алфавитную нумерацию, «волшебные» цифры;
- решать и составлять простые арифметические ребусы на сложение и вычитание однозначных и двузначных чисел.

3. Закономерности

- устанавливать, продолжать закономерности в расположении геометрических фигур и чисел;
- восстанавливать пропущенные элементы в последовательностях с геометрическими фигурами и числами;
- устанавливать и продолжать закономерности на сложение и вычитание чисел в пределах 100.

4. Время и движение

- устанавливать последовательность событий;
- обозначать время совершения действия (вчера, сегодня, завтра, утром, днем, вечером, ночью, весной, сейчас, позже, погода, всегда), устанавливать их соответствие и взаимосвязь для решения логических задач;
- использовать знание величин и единиц измерения длины, площади, массы, объема (вместимости), времени при решении нестандартных задач.

II. ГЕОМЕТРИЯ

1. Геометрическое мышление

- распознавать плоские и пространственные фигуры, анализировать их свойства;
- выполнять преобразования моделей геометрических фигур по заданной инструкции (форма, размер, цвет);
- выделять группы предметов или фигур, обладающих общим свойством.

2. Площади

- определять количество клеток в фигуре, рисовать фигуры другой формы, но с таким же количеством клеток;
- использовать прием наложения фигур для определения равенства фигур;
- составлять фигуры из определенного набора частей, разных/одинаковых по форме;
- делить (разрезать) простые фигуры на две и более части.

3. Геометрические неравенства

- конструировать геометрические фигуры из палочек;
- вычислять периметр фигур и длины ломаных.

III. АЛГЕБРА

1. От чисел к буквам

- составлять числовые и буквенные выражения по рисункам;
- использовать буквенную запись для фиксации свойств чисел и фигур;
- составлять и решать простые уравнения по их образной интерпретации с помощью весов и геометрических фигур.

2. Функциональные зависимости

- устанавливать и изменять свойства предметов (цвет, форму, размер);
- анализировать таблицы для определения свойств фигур и предметов;

- использовать таблицу для классификации фигур и предметов;
- определять зависимости между величинами, компонентами арифметических действий и использовать их для решения задач.

3. Неравенства и оценки

- решать логические задачи с использованием числового луча на основе сравнения предметов (старше, моложе, самый высокий, самый узкий и т. д.);
- решать нестандартные задачи на разностное сравнение;
- решать логические задачи на части и целое.

IV. ТЕОРИЯ ЧИСЕЛ

1. Делимость

- выполнять практические действия по распределению фигур и предметов в группы с равным количеством;
- наблюдать возможность практической расстановки парами, тройками и т. д. (или раскладке в вазы, на полки и т. д. поровну) без остатка.

2. Остатки

- наблюдать возникновение остатка при практической расстановке парами, тройками и т. д. (или при раскладке в вазы, на полки и т. д. поровну).

V. ЛОГИКА

1. Математическая логика

- делать простые выводы и умозаключения, используя слова «верно» и «неверно»;
- обосновывать свои суждения, опираясь на уже известные правила и свойства;
- решать логические задачи-ловушки (задачи на устранение мнимых логических противоречий, внимательность), обосновывать свои решения;
- решать логические задачи, используя метод исключения («четвертый лишний»);
- использовать модели для решения логических задач (числовой луч, таблица).

2. Принципы решения задач

- строить цепочки логических рассуждений;
- соотносить полученный результат с условием задачи, оценивать его правдоподобие;
- осуществлять простой перебор вариантов.

3. Алгоритмы и конструкции

- составлять, оставлять и использовать простые алгоритмы для определения последовательности действий при решении арифметических и логических задач.

4. Игры и стратегии

- понимать правила простых математических игр;
- действовать по правилам игры, придерживаться составленного плана (стратегии).

VI. КОМБИНАТОРИКА И ТЕОРИЯ МНОЖЕСТВ

1. Комбинаторика

- осуществлять перебор всех вариантов перестановки двух, трех объектов (предметов, фигур, цифр, букв);
- использовать идею организованного перебора (группировка вариантов).

2. Теория множеств

- выделять группы предметов или фигур, обладающих общим свойством, составлять группы предметов по заданному свойству (признаку), выделять части группы;
- соединять группы предметов в одно целое (сложение), удалять части группы предметов (вычитание);
- проводить аналогию сравнения, сложения и вычитания групп предметов со сравнением, сложением и вычитанием величин;
- применять переместительное свойство сложения групп предметов;
- изображать группы с помощью овалов;
- сравнивать группы предметов по количеству;
- задавать группы предметов с помощью перечисления элементов.

VII. КОМБИНАТОРНАЯ ГЕОМЕТРИЯ

1. Раскраски и разбиения

- выполнять раскраску фигур по заданным условиям.

2. Теория графов

- выполнять задания на сопоставление предметов двух групп по определенному признаку.

3. Комбинаторная геометрия

- выполнять задания на поиск фигур заданной формы;
- конструировать фигуры (треугольник, четырехугольник и т. д.) из палочек.

Обучающийся получит возможность научиться при решении олимпиадных задач самостоятельно:

- анализировать текст задачи, внетекстовую информацию;
- выбирать модели к нестандартным задачам на основе известных (числовой луч, таблица, выражение);
- строить логические цепочки рассуждений, обосновывать свой ответ;
- применять известный теоретический материал для обоснования хода решения;

- использовать практические интерпретации для решения задач (геометрического содержания, на перебор вариантов, про разбиение объектов на равные группы);
- сопоставлять ответ с условием задачи.

2 класс

К концу обучения во втором классе обучающийся научится:

1. АРИФМЕТИКА

1. Суммы

- восстанавливать пропущенные числа и знаки в примерах на сложение, вычитание, умножение и деление;
- использовать при решении нестандартных задач приемы упрощения устного счета при сложении и вычитании чисел в пределах 1000: арифметические законы и прием дополнения числа до круглого;
- использовать свойства сложения и вычитания для решения нестандартных арифметических задач;
- применять прием разбиения чисел на пары;
- использовать числовой луч в качестве инструмента при решении арифметических задач повышенной сложности;
- заполнять «магические» квадраты.

2. Числа и их свойства

- решать и составлять простые арифметические ребусы на сложение и вычитание двузначных чисел, умножение в пределах таблицы умножения;
- использовать известные свойства чисел в задачах на расстановку скобок и знаков арифметических действий (сложение, вычитание, умножение).

3. Закономерности

- устанавливать, продолжать закономерности в расположении геометрических фигур;
- восстанавливать пропущенные элементы в последовательностях с геометрическими фигурами и числами;
- устанавливать и продолжать закономерности на сложение и вычитание чисел в пределах 1000;
- выявлять закономерности в таблице умножения.

4. Время и движение

- устанавливать последовательность событий;
- обозначать время совершения действия (вчера, сегодня, завтра, утром, днем, вечером, ночью, весной, сейчас, позже, погода, всегда), устанавливать их соответствие и взаимосвязь для решения логических задач;
- выполнять простые действия с единицами времени (сложение, вычитание);

- организовывать перебор вариантов при решении задач про время.

II. ГЕОМЕТРИЯ

1. Геометрическое мышление

- самостоятельно выявлять и анализировать свойства плоских и объемных фигур;
- использовать знание свойств фигур при решении нестандартных задач;
- выполнять преобразования моделей геометрических фигур по заданной инструкции (форма, размер, цвет).

2. Площади

- использовать прием наложения фигур для определения равенства фигур;
- составлять фигуры из определенного набора частей, разных/одинаковых по форме;
- делить (разрезать) простые фигуры на две и более части;
- проводить предварительный анализ для разрезания фигуры на равные части (подсчет количества клеток в частях, перебор возможных вариантов формы фигуры, состоящих из найденного количества клеток);
- осуществлять разрезание фигур на равные части с дополнительными условиями (например, чтобы каждая часть содержала поровну отмеченных клеток).

3. Геометрические неравенства

- конструировать геометрические фигуры из палочек;
- вычислять периметр фигур и длины ломаных;
- сравнивать длины путей по прямой и ломаной линии;
- использовать поиск равных участков путей для сравнения их длин.

III. АЛГЕБРА

1. От чисел к буквам

- составлять буквенные выражения по тексту задач и графическим моделям и, наоборот, составлять текстовые задачи к заданным буквенным выражениям;
- строить схемы, на которых единичный отрезок (часть) используется в качестве переменной.

2. Функциональные зависимости

- составлять числовые и буквенные выражения по рисункам на сложение, вычитание, умножение и деление;
- устанавливать и изменять свойства предметов (цвет, форму, размер);
- анализировать таблицы для определения свойств фигур и предметов;

- использовать таблицу для классификации фигур и предметов;
- определять зависимости между величинами, компонентами арифметических действий и использовать их для решения задач.

3. Неравенства и оценки

- решать логические задачи с использованием числового луча на основе сравнения предметов (старше, моложе, самый высокий, самый узкий и т. д.);
- решать нестандартные задачи на разностное и кратное сравнение;
- решать логические задачи на части и целое.

IV. ТЕОРИЯ ЧИСЕЛ

1. Делимость

- выполнять практические действия по распределению фигур и предметов в группы с равным количеством;
- решать задачи на установление отношения «делится», «не делится»;
- использовать понятие о четных и нечетных числах, свойство чередования четных и нечетных чисел на числовом луче для решения нестандартных задач.

2. Остатки

- выполнять деление с остатком на основе графических моделей и вычислительного алгоритма.

V. ЛОГИКА

1. Математическая логика

- делать простые выводы и умозаключения, используя слова «верно» и «неверно»;
- обосновывать свои суждения, опираясь на уже известные правила и свойства;
- решать задачи методом последовательного исключения вариантов, фиксировать шаги рассуждения в таблице;
- решать логические задачи-ловушки (задачи на устранение мнимых логических противоречий, внимательность), обосновывать свои решения;
- использовать модели для решения логических задач (числовой луч, таблица, схема).

2. Принципы решения задач

- использовать упорядочивание чисел (расположение по возрастанию/убыванию) при решении нестандартных задач;
- замечать «узкие места» в числовом ряду и использовать для построения конструкций;
- использовать систематический перебор при решении задач.

3. Алгоритмы и конструкции

- определять порядок действий, использовать обратные действия при решении задач;
- составлять и использовать простые алгоритмы для определения последовательности действий при решении арифметических и логических задач.

4. Игры и стратегии

- понимать правила простых математических игр;
- действовать по правилам игры, придерживаться составленного плана (стратегии).

VI. КОМБИНАТОРИКА И ТЕОРИЯ МНОЖЕСТВ**1. Комбинаторика**

- подсчитывать количество вариантов перестановки двух и трех объектов (предметов, фигур, цифр, букв);
- выполнять перестановки с ограничениями;
- использовать идею организованного перебора (группировка вариантов, связь с уже известными задачами);
- использовать возможности для систематического перебора вариантов.

2. Теория множеств

- выделять группы предметов или фигур, обладающих общим свойством, составлять группы предметов по заданному свойству (признаку), выделять части группы;
- соединять группы предметов в одно целое (сложение), удалять части группы предметов (вычитание);
- проводить аналогию сравнения, сложения и вычитания групп предметов со сравнением, сложением и вычитанием величин;
- применять переместительное свойство сложения групп предметов;
- изображать группы с помощью овалов;
- сравнивать группы предметов по количеству;
- задавать группы предметов с помощью перечисления элементов.

VII. КОМБИНАТОРНАЯ ГЕОМЕТРИЯ**1. Раскраски и разбиения**

- выполнять задания на раскраску по данным условиям;
- применять перебор вариантов при решении задач на раскраску.

2. Теория графов

- изображать граф знакомств;
- вычислять количество связей по схемам рациональным способом.

3. Комбинаторная геометрия

- выполнять задания на поиск фигур заданной формы;
- добиваться нужного количества геометрических фигур, изменяя положение палочек или увеличивая (уменьшая) их число.

Обучающийся получит возможность научиться при решении олимпиадных задач самостоятельно:

- анализировать текст задачи, внетекстовую информацию;
- выбирать модели к нестандартным задачам на основе известных (числовой луч, таблица, выражение, дерево вариантов);
- строить логические цепочки рассуждений, обосновывать свой ответ;
- применять известный теоретический материал для обоснования хода решения;
- использовать практические интерпретации для решения задач (геометрического содержания, на перебор вариантов, про разбиение объектов на равные группы);
- сопоставлять ответ (пример) с условием задачи.

Ознакомительный этап («Математический театр»). 3–6 классы

3 класс

К концу обучения в третьем классе обучающийся научится:

І. АРИФМЕТИКА

1. Суммы

- применять приемы рациональных вычислений: метод приведения к круглому числу, метод группировки (на примере группировки парами «сложи первое с последним»);
- использовать метод группировки в задачах с геометрическим содержанием;
- использовать метод дополнения до целого в клетчатых задачах;
- находить и использовать связи между числовыми и геометрическими задачами для упрощения счета.

2. Числа и их свойства

- применять алгоритмы сложения, вычитания и умножения чисел в столбик при решении числовых ребусов;
- использовать принцип «узких мест» для упрощения перебора в арифметических задачах на примере числовых ребусов;

- решать задачи на восстановление знаков действий, расстановку скобок;
- решать задачи на нахождение чисел с указанными свойствами.

3. Закономерности

- анализировать задачи с повторяющимися числами;
- находить циклы в арифметических задачах;
- вычислять длину цикла, количество циклов и остаток, а также применять эти понятия при решении задач;
- определять и использовать порядковый номер элемента цикла в задачах с «большими» числами.

4. Время и движение

- учитывать разницу часовых поясов при решении задач на движение;
- решать задачи про отстающие и спешащие часы.

II. ГЕОМЕТРИЯ

1. Геометрическое мышление

- выполнять повороты клетчатой фигуры на прямой угол;
- различать «зеркальные» фигуры;
- применять симметрию и повороты фигур при решении задач на разрезание.

2. Площади

- находить различные способы разрезания одной фигуры на равные части, основываясь на соображениях симметрии;
- применять метод перебора при решении геометрических задач на примере задач на разрезание и составление фигур из частей;
- изображать полный комплект фигур тетрамино и использовать эти фигуры при решении задач;
- использовать множество делителей числа для вычисления возможного количества частей, на которые можно разрезать фигуру.

3. Геометрические неравенства

- строить конструкции с отрезками и ломаными, используя метод «проб и ошибок»;
- решать задачи, связанные с соотношениями длин отрезков на прямой.

III. АЛГЕБРА

1. От чисел к буквам

- применять метод уравнивания для решения текстовых задач;
- строить вспомогательные схемы к нестандартным задачам, связанным с разностным и кратным сравнением величин;

- выбирать удобный единичный отрезок (часть) при построении схем к таким задачам.
- 2. Функциональные зависимости**
- использовать формулы при решении нестандартных текстовых задач: площади прямоугольника, объема и площади поверхности куба, прямоугольного параллелепипеда; решать задачи на раскраску поверхности объемных фигур.
- 3. Неравенства и оценки**
- использовать правила сравнения многозначных чисел при решении задач;
- решать простейшие задачи на нахождение наибольшего или наименьшего многозначного числа с определенными свойствами;
- применять правила сравнения чисел для доказательства минимальности и максимальности найденного числа.

IV. ТЕОРИЯ ЧИСЕЛ

1. Делимость

- выводить признак делимости на 2 с помощью числового луча и заикливания последней цифры;
- анализировать изменение последней цифры числа при сложении, вычитании, умножении;
- доказывать свойства четности суммы и разности двух чисел и использовать их при решении задач.

2. Остатки

- использовать признак делимости на 10 при решении задач;
- определять остаток от деления числа на 10 по его последней цифре числа;
- использовать правила изменения последней цифры при арифметических операциях (сложение, вычитание, умножение) при решении задач.

V. ЛОГИКА

1. Математическая логика

- использовать понятия истинного и ложного высказывания при решении логических задач;
- составлять вопросы, позволяющие различить некоторые ситуации по ответам «да» и «нет»;
- определять два необходимых варианта для перебора и выполнять перебор этих вариантов в логических задачах.

2. Принципы решения задач

- использовать геометрические интерпретации при решении логических и арифметических задач;

- представлять условия задачи в виде нестандартного чертежа;
- использовать чертеж для решения задач с эффектом «плюс-минус один».

3. Алгоритмы и конструкции

- составлять алгоритм отмеривания определенного количества жидкости с помощью двух или более емкостей и источника жидкости;
- использовать табличную форму записи шагов алгоритма переливаний;
- укрупнять шаги алгоритма при наличии повторяющихся групп действий;
- применять идею анализа «с конца» при решении задач на переливание.

4. Игры и стратегии

- определять победителя в играх-шутках для двух игроков с фиксированным количеством ходов с помощью подсчета общего количества ходов;
- использовать простой анализ выигрышных позиций при выборе хода в математической игре для двух игроков.

VI. КОМБИНАТОРИКА И ТЕОРИЯ МНОЖЕСТВ

1. Комбинаторика

- использовать схемы (графы) для удобства подсчета количества связей (дорог, рукопожатий);
- применять метод подсчета двумя способами при подсчете количества связей (количества игр в однокруговом турнире, количества ребер в двудольном графе);
- доказывать невозможность построения графа с определенным количеством связей, основываясь на свойствах четности и делимости чисел.

2. Теория множеств

- строить схемы на основе диаграммы Эйлера — Венна к задачам о множествах с данным количеством элементов;
- вычислять по схемам количество элементов в пересечении и объединении множеств по данным количествам элементов в множествах разными способами.

VII. КОМБИНАТОРНАЯ ГЕОМЕТРИЯ

1. Раскраски и разбиения

- конструировать примеры раскрасок досок с определенными свойствами, основываясь на методе «проб и ошибок» и известных шаблонах раскраски (шахматная раскраска, диагональная раскраска в несколько цветов);

- доказывать с помощью принципа «узких мест» невозможность раскраски доски в меньшее (большее) количество цветов, чем найденное;
- использовать метод «проб и ошибок» и принцип «узких мест» при конструировании примеров в задачах на раскраску досок и расстановку фигур в клетках.

2. Теория графов

- использовать схему со связями (граф) для демонстрации односторонних и двусторонних связей между объектами;
- анализировать и использовать свойства графов при решении задач (число вершин, степени вершин);
- находить «одинаковые» (изоморфные) графы и изображать граф, равный (изоморфный) данному без самопересечений ребер.

3. Комбинаторная геометрия

- исследовать взаимное расположение точек и отрезков на плоскости;
- использовать изображение точек и отрезков, лежащих на одной прямой, для решения задач;
- строить простые конструкции с выпуклыми и невыпуклыми фигурами.

Обучающийся получит возможность научиться при решении олимпиадных задач самостоятельно:

- анализировать текст задачи, внетекстовую информацию;
- находить взаимосвязи между условиями задачи и использовать их для построения модели и хода решения;
- строить модели на основе уже известных (числовой луч, схема, таблица, диаграмма Эйлера — Венна, граф);
- находить «узкие места» задачи и использовать их при конструировании примеров;
- использовать метод «проб и ошибок»;
- применять метод перебора в задачах с геометрическим содержанием;
- строить логические рассуждения в устной форме;
- формулировать гипотезы на основе наблюдения и доказывать их;
- преодолевать кажущиеся противоречия, связанные с недостаточным анализом условия задачи;
- проверять ответ (пример) на соответствие всем условиям задачи;
- делать краткую (схематичную) запись решения задачи.

4 класс

К концу обучения в четвертом классе обучающийся научится:

I. АРИФМЕТИКА

1. Суммы

- решать задачи о разделении чисел на группы с равной суммой, о расстановке чисел в таблицах с выполнением свойств равенства сумм (магические квадраты);
- использовать свойство изменения суммы на число, на которое увеличилось каждое слагаемое.

2. Числа и их свойства

- искать возможные решения буквенных ребусов, используя метод «проб и ошибок»;
- находить все решения ребуса с помощью метода перебора;
- использовать принцип «узких мест», свойства четности для ограничения количества вариантов для перебора в арифметических задачах на примере буквенных ребусов;
- доказывать отсутствие решений у ребуса с помощью метода перебора, числовых оценок.

3. Закономерности

- замечать и преодолевать эффект «плюс-минус один» в арифметических задачах с помощью построения подходящей схемы (чертежа);
- выводить формулу для определения количества натуральных чисел в промежутке, используя числовой луч;
- формулировать гипотезы о числовых закономерностях на основе наблюдения и проверять их непротиворечивость на «малых числах» (метод масштабирования).

4. Время и движение

- решать задачи на относительное движение с неполными данными;
- определять и разбирать возможные случаи для нахождения всех вариантов ответа в задачах на движение;
- использовать недельную и годовую цикличность при решении задач;
- конструировать примеры и доказывать невозможность конструкции в задачах про календарь.

II. ГЕОМЕТРИЯ

1. Геометрическое мышление

- изображать на плоскости пространственные фигуры, составленные из кубиков;
- применять для конструирования примеров и упрощения вычислений изображение по слоям фигуры, составленной из кубиков;

- решать задачи на разрезание пространственных фигур и составление фигур из объемных частей;
- вычислять объем пространственной фигуры, составленной из кубиков.

2. Площади

- строить способы разрезания фигуры на клетчатой бумаге, линии разреза в которых идут не по границам клеток;
- использовать свойство аддитивности площади и метод разбиения на элементарные части (прямоугольники, прямоугольные треугольники) для вычисления площадей фигур;
- проводить анализ возможных форм частей в задачах о разрезании не по линиям сетки.

3. Геометрические неравенства

- решать задачи, сводящиеся к поиску кратчайшего пути между двумя точками на плоскости;
- приближенно вычислять и оценивать с двух сторон длины ломаных и кривых с помощью нити;
- решать с помощью конструирования в пространстве задачи о непрямом измерении расстояний (на примере задачи о нахождении диагонали кирпича).

III. АЛГЕБРА

1. От чисел к буквам

- применять прием «учти лишнее» в задачах о подсчетах.

2. Функциональные зависимости

- доказывать формулы перевода единиц измерения площади, объема фигур;
- решать задачи с нестандартными единицами измерения.

3. Неравенства и оценки

- использовать метод перебора при решении текстовых задач;
- применять идеи четности для уменьшения количества вариантов для перебора;
- доказывать оценки величины сверху или снизу.

IV. ТЕОРИЯ ЧИСЕЛ

1. Делимость

- доказывать свойство четности суммы нескольких чисел с помощью разбиения на пары;
- использовать свойства четности и метод разбиения на пары в доказательствах.

2. Остатки

- применять при решении задач свойство повторяемости на числовом луче чисел, делящихся на n , дающих одинаковые остатки от деления на n ;
- конструировать примеры, связанные с повторяемостью остатков на числовом луче.

V. ЛОГИКА

1. Математическая логика

- использовать отрицания элементарных высказываний при решении логических задач;
- находить все возможные варианты ответа с помощью перебора по персонажу в задачах о рыцарях и лжецах;
- строить и записывать цепочку рассуждений в логических задачах о рыцарях и лжецах.

2. Принципы решения задач

- формулировать гипотезы и проверять их непротиворечивость на малых случаях;
- разбивать задачу на эквивалентные подзадачи (использовать блоки в задачах на конструирование).

3. Алгоритмы и конструкции

- составлять алгоритм переправы;
- использовать табличную форму записи шагов алгоритма переправы;
- анализировать возможные дальнейшие шаги алгоритма для упрощения перебора вариантов.

4. Игры и стратегии

- отыскивать выигрышную стратегию в математических играх для двух игроков и доказывать ее с помощью перебора всех вариантов хода противника;
- изображать варианты ходов с помощью дерева вариантов.

VI. КОМБИНАТОРИКА И ТЕОРИЯ МНОЖЕСТВ

1. Комбинаторика

- изображать дерево вариантов для решения комбинаторных задач;
- подсчитывать количество путей в дереве вариантов с помощью правила умножения.

2. Теория множеств

- строить схемы на основе диаграммы Эйлера — Венна к задачам с неизвестным количеством элементов, а также выраженном в виде частей, дробей, процентов от одного и того же числа;
- использовать переменную и буквенные выражения при решении задач о множествах с неизвестным числом элементов.

VII. КОМБИНАТОРНАЯ ГЕОМЕТРИЯ

1. Раскраски и разбиения

- доказывать чередование объектов двух типов в ряду, круге;
- использовать свойства чередования объектов (относительное количество чередующихся объектов, зависимость типа объекта от четности его номера в ряду).

2. Теория графов

- находить способ изображения фигуры одним росчерком (эйлерова пути в графе);
- доказывать невозможность изображения фигуры одним росчерком с помощью анализа степеней вершин графа.

3. Комбинаторная геометрия

- строить геометрические конструкции на основе выпуклых и невыпуклых многоугольников с заданным числом сторон;
- решать задачи о числе сторон в пересечении, объединении многоугольников.

Обучающийся получит возможность научиться при решении олимпиадных задач самостоятельно:

- анализировать текст задачи, внетекстовую информацию;
- находить взаимосвязи между условиями задачи и использовать их для построения модели и хода решения;
- строить модели на основе уже известных (числовой луч, схема, таблица, диаграмма Эйлера — Венна, граф, дерево вариантов);
- находить «узкие места» задачи и использовать их при конструировании примеров;
- применять метод перебора в арифметических, логических задачах;
- строить логические рассуждения в устной и письменной форме;
- формулировать и решать вспомогательную задачу, которая позволяет построить гипотезу или проверить ее непротиворечивость;
- описывать устно «путь к решению», то есть логическое рассуждение, которое позволило прийти к решению (конструкции, доказательству);
- преодолевать кажущиеся противоречия, связанные с недостаточным анализом условия задачи;
- проверять ответ (пример) на соответствие всем условиям задачи;
- сравнивать алгоритмы по количеству действий, искать алгоритм с меньшим числом действий;

- делать краткую (схематичную) запись решения задачи, логического рассуждения.

5 класс

К концу обучения в пятом классе обучающийся научится:

I. АРИФМЕТИКА

1. Суммы

- вычислять суммы чисел, идущих через равные промежутки, с помощью разбиения на пары;
- применять формулу суммы всех натуральных чисел от 1 до n ;
- использовать подсчет суммы чисел в задачах о разбиении на пары групп чисел с равной суммой.

2. Числа и их свойства

- конструировать примеры с дробями;
- применять арифметические свойства дробей, правила сокращения дробей в задачах-конструктивах;
- решать задачи о равномерном распределении частей между несколькими людьми.

3. Закономерности

- проводить предварительный анализ в задачах-конструктивах;
- использовать разбиение на подзадачи при построении геометрических и числовых конструкций.

4. Время и движение

- строить и применять нестандартные схемы (чертежи) к задачам на движение;
- изображать скорости движения в частях (единичных отрезках);
- использовать более крупные единицы времени, НОД и НОК для уравнивания расстояний.

II. ГЕОМЕТРИЯ

1. Геометрическое мышление

- изображать развертки простых пространственных фигур (куб, параллелепипед, пирамида);
- подбирать подходящие разные развертки куба и прямоугольного параллелепипеда для решения задач;
- изображать три вида объемной фигуры;
- восстанавливать возможную форму пространственной фигуры по ее трем видам.

2. Площади

- применять метод перебора в геометрических задачах, соображения симметрии для его упрощения;
- использовать фигуры пентамино при решении задач на разрезание;

- вводить вспомогательную сетку (с укрупненными или уменьшенными клетками, наклонную сетку) для вычисления площадей фигур на клетчатой бумаге;
 - применять параллельный перенос на клетчатой бумаге для упрощения вычисления площадей фигур;
 - проводить предварительный анализ в задачах о перекраивании фигур;
 - находить возможные способы разрезания и составления фигур в задачах о перекраивании фигур с помощью метода «проб и ошибок», принципа «узких мест».
- 3. Геометрические неравенства**

- рассматривать все неэквивалентные варианты взаимного расположения нескольких точек на прямой;
- вычислять координату середины отрезка на числовой прямой;
- находить расстояние между серединами отрезков на числовой прямой по координатам вершин этих отрезков.

III. АЛГЕБРА

1. От чисел к буквам

- вводить удобную переменную в нестандартных текстовых задачах;
- составлять и решать уравнение с одной переменной.

2. Функциональные зависимости

- устанавливать взаимно однозначное соответствие между элементами двух множеств;
- использовать взаимно однозначное соответствие (разбиение на пары) для сравнения количества элементов в двух множествах;
- применять метод разбиения на пары при решении комбинаторных задач.

3. Неравенства и оценки

- доказывать оценки значения величины «сверху» и «снизу»;
- использовать оценки «сверху» и «снизу» для ограничения перебора числовых значений величины;
- применять двусторонние оценки для доказательства единственности возможного значения неизвестной.

IV. ТЕОРИЯ ЧИСЕЛ

1. Делимость

- применять свойства делимости, признаки делимости на 2, 4, 8, 5, 25, 10, 3, 9 при решении нестандартных задач;

- доказывать обобщения признаков делимости (признаки делимости на степени двойки, степени пятерки);
- использовать разложение натурального числа на простые множители в задачах-конструктивах и задачах на доказательство;
- фиксировать и применять инвариантность свойства делимости некоторой величины в процессах.

2. Остатки

- определять остаток от деления числа на 2, 4, 8, 5, 10, 3, 9 с помощью соответствующего признака делимости;
- использовать свойство делимости на n разности числа и его остатка от деления на n при решении задач.

V. ЛОГИКА

1. Математическая логика

- находить с помощью метода перебора все варианты ответа в логических задачах;
- анализировать высказывания о существовании и всеобщности, использовать их отрицания при решении логических задач;
- строить отрицания высказываний со связками «больше», «меньше», «больше или равно», «меньше или равно».

2. Принципы решения задач

- применять метод «анализ с конца» (метод обратного хода) при решении текстовых и логических задач;
- использовать табличную форму записи решения текстовой задачи с помощью «анализа с конца»;
- использовать идею доказательства «от противного» при решении задач о наибольшем или наименьшем возможном значении величины (задачи с вопросом «сколько нужно взять»).

3. Алгоритмы и конструкции

- составлять алгоритмы угадывания с помощью вопросов, на которые можно отвечать только «да» и «нет»;
- использовать табличную форму записи шагов алгоритма угадывания.

4. Игры и стратегии

- строить и обосновывать симметричную стратегию, симметричную стратегию «с центром» в математических играх для двух игроков;
- приводить примеры неверного использования симметричной стратегии;
- конструировать выигрышную стратегию на основе анализа выигрышных и проигрышных позиций в игре.

VI. КОМБИНАТОРИКА И ТЕОРИЯ МНОЖЕСТВ

1. Комбинаторика

- применять правила суммы (правило «ИЛИ») и произведения (правило «И») в комбинаторных задачах;
- решать задачи, требующие комбинации этих двух правил.

2. Теория множеств

- применять метод дополнения, теоретико-множественные модели для решения задач о подсчетах;
- вычислять количество натуральных чисел в диапазоне, делящихся или не делящихся на некоторое n .

VII. КОМБИНАТОРНАЯ ГЕОМЕТРИЯ

1. Раскраски и разбиения

- использовать шахматную раскраску доски, других объектов для проведения оценок и доказательств;
- использовать шахматную раскраску для конструирования примеров.

2. Теория графов

- строить более сложные интерпретации задач в терминах теории графов (графы шахматных фигур);
- вычислять количество ребер в полном графе, графе шахматной фигуры;
- представлять турнир в виде графа;
- изображать двудольный граф.

3. Комбинаторная геометрия

- строить регулярные покрытия плоскости равными фигурами (паркеты);
- использовать для замощения правильные многоугольники, выпуклые и невыпуклые фигуры.

Обучающийся получит возможность научиться при решении олимпиадных задач самостоятельно:

- анализировать текст задачи, внетекстовую информацию;
- анализировать вопрос (требование) задачи;
- находить взаимосвязи между условиями задачи и использовать их для построения модели и хода решения;
- строить модели на основе уже известных (числовой луч, схема, таблица, диаграмма Эйлера — Венна, граф, дерево вариантов);
- составлять алгоритм решения задачи;
- находить «узкие места» задачи и использовать их при конструировании примеров;
- применять метод перебора;
- строить логические рассуждения в устной и письменной форме;

- описывать устно «путь к решению», то есть логическое рассуждение, которое позволило прийти к решению (конструкции, доказательству);
- преодолевать кажущиеся противоречия, связанные с недостаточным анализом условия задачи;
- проверять ответ (пример) на соответствие всем условиям задачи;
- проверять ход доказательства на отсутствие противоречий и необоснованных выводов;
- делать краткую (схематичную) запись решения задачи, логического рассуждения;
- формулировать в письменном виде полный текст логического рассуждения.

6 класс

К концу обучения в шестом классе обучающийся научится:

I. АРИФМЕТИКА

1. Суммы

- определять неизвестную, значение которой можно выразить двумя способами, и вычислять ее значения (применять метод подсчета двумя способами);
- использовать метод подсчета двумя способами в доказательствах «от противного», при решении задач с арифметическими таблицами, геометрических задач;
- составлять уравнения на основе подсчета неизвестной двумя способами;
- доказывать и применять при решении задач свойства среднего арифметического набора чисел (изменение при увеличении всех чисел набора на некоторое число и в некоторое число раз; оценка среднего арифметического сверху и снизу наибольшим и наименьшим числами набора; неизменность среднего арифметического при добавлении числа, равного среднему арифметическому чисел набора).

2. Числа и их свойства

- строить конструкции с отрицательными числами;
- использовать отрицательные числа в задачах с числовыми оценками.

3. Закономерности

- конструировать сложные арифметические, геометрические примеры с помощью метода последовательного конструирования;
- доказывать возможность существования конструкции методом последовательного конструирования;
- определять необходимое количество базовых конструкций в задачах с последовательным конструированием.

4. Время и движение

- составлять схемы к задачам про движение по кругу, в том числе схем с единичными дугами;
- решать задачи о количестве пересечений стрелок часов, их взаимном расположении;
- вычислять градусные меры дуг между часовой, минутной, секундной стрелками.

II. ГЕОМЕТРИЯ

1. Геометрическое мышление

- изображать пространственные фигуры по набору свойств (количество вершин, ребер, граней);
- строить развертки более сложных многогранников, восстанавливать вид пространственной фигуры по ее развертке;
- решать задачи об оклеивании объемных фигур, построении путей на поверхности таких фигур.

2. Площади

- строить разрезания нечетчатых фигур на равные части;
- использовать вспомогательную сетку для разрезания нечетчатых фигур.

3. Геометрические неравенства

- применять неравенство треугольника при решении простых геометрических и текстовых задач;
- доказывать неравенство треугольника с помощью построений циркулем и линейкой.

III. АЛГЕБРА

1. От чисел к буквам

- применять запись числа в виде суммы разрядных слагаемых ($a + 10b + 100c + \dots$) для сведения задачи к уравнению в цифрах;
- решать уравнения в цифрах с помощью метода перебора и использования свойств делимости.

2. Функциональные зависимости

- использовать пропорции и их свойства при решении нестандартных текстовых задач.

3. Неравенства и оценки

- подбирать промежуточное число (посредника) для доказательства числовых неравенств, сравнения чисел;
- использовать метод введения переменной для доказательства числовых неравенств, сравнения чисел.

IV. ТЕОРИЯ ЧИСЕЛ

1. Делимость

- доказывать и применять в задачах признаки делимости, связанные с десятичной записью числа (на 7, 11, 13 и др.);
- решать задачи на оценку и пример, связанные с делимостью (нахождение наименьшего числа с указанными свойствами делимости, наименьшей возможной суммой цифр).

2. Остатки

- записывать в общем виде целое число с определенным остатком от деления на n ;
- использовать арифметические свойства остатков при решении задач;
- применять свойство зацикливания остатков при возведении числа в степень, определять остаток данной степени числа.

V. ЛОГИКА

1. Математическая логика

- применять метод «от противного»;
- строить отрицания высказываний с логическими связками «и», «или», сложных высказываний, применять эти отрицания в доказательствах «от противного»;
- решать логические задачи на оценку и пример;
- решать задачи о расположении объектов по кругу.

2. Принципы решения задач

- применять принцип Дирихле (избыток, недостаток) для решения задач;
- использовать доказательство «от противного» для решения задач, требующих обобщения принципа Дирихле;
- решать геометрические задачи с помощью принципа Дирихле.

3. Алгоритмы и конструкции

- составлять алгоритмы взвешиваний;
- использовать представление результатов взвешиваний с помощью дерева вариантов;
- доказывать невозможность построения алгоритма взвешиваний при недостаточном количестве доступных взвешиваний.

4. Игры и стратегии

- строить стратегии в играх «на опережение»;
- доказывать, что один из игроков может обеспечить себе ничью.

VI. КОМБИНАТОРИКА И ТЕОРИЯ МНОЖЕСТВ

1. Комбинаторика

- вычислять количество анаграмм данного слова с различными и повторяющимися буквами;
- выводить формулы для числа перестановок с помощью правила произведения.

2. Теория множеств

- использовать метод введения переменной в задачах про множества.

VII. КОМБИНАТОРНАЯ ГЕОМЕТРИЯ

1. Раскраски и разбиения

- использовать различные виды раскрасок досок для доказательства невозможности разрезания доски на определенные части.

2. Теория графов

- формулировать условие задачи в терминах теории графов;
- применять лемму о рукопожатиях для подсчета количества ребер в графе;
- использовать свойство четности количества вершин нечетной степени в графе в доказательствах;
- доказывать лемму о хороводах.

3. Комбинаторная геометрия

- применять невыпуклые фигуры при конструировании;
- определять все возможные значения количества сторон при пересечении многоугольников.

Обучающийся получит возможность научиться при решении олимпиадных задач самостоятельно:

- анализировать текст задачи, внетекстовую информацию;
- анализировать вопрос (требование) задачи;
- находить взаимосвязи между условиями задачи и использовать их для построения модели и хода решения;
- строить модели на основе уже известных (числовой луч, схема, таблица, диаграмма Эйлера — Венна, граф, дерево вариантов);
- составлять алгоритм решения задачи;
- строить отрицания сложных высказываний и использовать метод «от противного» для доказательства вспомогательных утверждений;
- находить «узкие места» задачи и использовать их при конструировании примеров;
- применять метод перебора;

- строить логические рассуждения в устной и письменной форме;
- формулировать и доказывать необходимые вспомогательные свойства (леммы);
- преодолевать кажущиеся противоречия, связанные с недостаточным анализом условия задачи;
- проверять ответ (пример) на соответствие всем условиям задачи;
- проверять ход доказательства на отсутствие противоречий и необоснованных выводов;
- фиксировать противоречия в ходе перебора случаев и делать выводы об их невозможности;
- формулировать в письменном виде полный текст решения задачи.

Практический этап. 7–9 классы

7 класс

К концу обучения в седьмом классе обучающийся научится:

I. АРИФМЕТИКА

1. Суммы

- вычислять длинные суммы способом «телескопического суммирования»;
- использовать формулы сокращенного умножения, разложения многочленов на множители для вычисления сумм.

2. Числа и их свойства

- использовать свойства рациональных чисел при решении нестандартных задач;
- строить конструкции с рациональными числами.

3. Закономерности

- обобщать числовую задачу на задачу с переменной;
- составлять и доказывать формулы числовых закономерностей в арифметических, геометрических, логических и комбинаторных задачах.

4. Время и движение

- решать задачи на движение с помощью перехода в движущуюся систему координат;
- учитывать протяженность объектов в задачах на движение;
- изображать схемы к нестандартным задачам на движение по реке и задачам, которые описывают схожий тип движения.

II. ГЕОМЕТРИЯ

1. Геометрическое мышление

- решать задачи на построение с использованием соображений симметрии;
- решать нестандартные задачи на нахождение ГМТ (геометрического места точек).

2. Площади

- доказывать и применять формулу площади произвольного треугольника;
- вычислять площади неклечатых фигур с помощью разрезания на элементарные части (прямоугольники и треугольники).

3. Геометрические неравенства

- использовать осевую симметрию при доказательстве геометрических неравенств;
- решать задачу о нахождении кратчайшего пути между двумя точками, находящимися по одну сторону от заданной прямой и касающегося этой прямой.

4. Аналитические методы в геометрии

- доказывать теорему Пифагора с помощью метода дополнения и алгебраических интерпретаций;
- применять теорему Пифагора при решении задач на разрезание.

III. АЛГЕБРА

1. От чисел к буквам

- применять способы разложения многочленов на множители при решении нестандартных алгебраических задач;
- использовать формулы сокращенного умножения для решения таких задач;
- применять метод замены числовых значений переменными для упрощения числовых выражений.

2. Функциональные зависимости

- применять свойства линейной функции при решении нестандартных задач.

3. Неравенства и оценки

- доказывать арифметические свойства неравенств и применять их при решении задач;
- доказывать неравенства с помощью выделения полных квадратов;
- доказывать и применять неравенство Коши (о среднем арифметическом и среднем геометрическом для двух чисел);

- использовать в доказательстве неравенств метод разбиения одночленов на слагаемые, прибавления и вычитания некоторого одночлена;
- доказывать и применять неравенство о сумме квадратов трех чисел и их попарных произведений.

IV. ТЕОРИЯ ЧИСЕЛ

1. Делимость

- обосновывать корректность алгоритма Евклида и применять его при решении числовых задач, задач о делимости;
- доказывать и применять свойства НОД и НОК;
- доказывать теорему о линейном представлении НОД;
- решать линейные уравнения в целых числах.

2. Остатки

- ограничивать множество возможных решений текстовых задач, уравнений в целых числах с помощью перебора по остаткам;
- составлять таблицы возможных остатков квадратов, кубов чисел;
- использовать свойства сравнений по модулю при решении задач;
- решать сравнения с помощью сведения к линейным уравнениям в целых числах.

V. ЛОГИКА

1. Математическая логика

- использовать дополнительную раскраску и разбиение на группы для решения логических задач на оценку и пример;
- строить отрицание логического следования.

2. Принципы решения задач

- применять принцип «узких мест» для конструирования примеров и доказательства утверждений;
- использовать идею упорядочивания числовых рядов по возрастанию/убыванию, рассмотрения наибольшего или наименьшего числа в ряду для конструирования примеров и доказательства утверждений;
- применять геометрический принцип крайнего.

3. Алгоритмы и конструкции

- использовать «жадный» алгоритм для составления примеров, доказательства максимальности или минимальности;
- применять «жадный» алгоритм при последовательном конструировании;

- приводить примеры задач, в которых «жадный» алгоритм не дает оптимальный ответ.

4. Игры и стратегии

- конструировать стратегии в математических играх для двух игроков, основанные на предварительном разбиении ходов на пары;
- разрабатывать стратегии в математических играх для двух игроков, основанные на создании «заповедников».

VI. КОМБИНАТОРИКА И ТЕОРИЯ МНОЖЕСТВ

1. Комбинаторика

- находить число способов размещения с повторениями и без повторений;
- выводить формулу для числа размещений в виде произведения и в виде отношения факториалов;
- находить число сочетаний;
- выводить формулу для числа сочетаний;
- различать ситуации, в которых нужно подсчитать число размещений и число сочетаний;
- доказывать равенства для чисел сочетаний алгебраически и комбинаторно;
- решать задачи на подсчет количества способов, связанные с числом размещений и сочетаний.

2. Теория множеств

- выводить и использовать формулу включений-исключений для трех множеств.

VII. КОМБИНАТОРНАЯ ГЕОМЕТРИЯ

1. Раскраски и разбиения

- применять разбиение на группы объектов двух типов, расположенных по кругу;
- использовать метод разбиения досок на непересекающиеся части для доказательства оценок;
- решать задачи с помощью усреднения (с подсчетом общего числа разбиений).

2. Теория графов

- использовать свойства связности, понятие компонент связности графа при решении задач;
- применять графы-деревья для решения задач;
- использовать двудольные графы и их свойства для решения задач.

3. Комбинаторная геометрия

- доказывать свойства раскрасок плоскости;
- решать задачи о существовании одноцветных и разноцветных точек на определенном расстоянии на плоскости;

- строить правильные раскраски паркетов;
- решать задачи о правильной раскраске объемных фигур.

Обучающийся получит возможность научиться при решении олимпиадных задач самостоятельно:

- анализировать текст задачи, внетекстовую информацию;
- анализировать вопрос (требование) задачи;
- находить взаимосвязи между условиями задачи и использовать их для построения модели и хода решения;
- строить модели на основе уже известных (график на координатной плоскости, схема, таблица, диаграмма Эйлера — Венна, граф, уравнение, неравенство);
- выбирать общий подход к решению задачи;
- при необходимости корректировать ход решения задачи в процессе ее решения;
- конструировать собственный способ решения задачи;
- применять общие принципы решения задач (анализ «узких мест», принцип крайнего, масштабирование задачи, индуктивные рассуждения);
- формулировать и доказывать необходимые вспомогательные свойства (леммы);
- проверять решение задачи на соответствие условиям и требованиям, непротиворечивость математическому и жизненному опыту;
- излагать решение задачи в письменной и устной форме.

8 класс

К концу обучения в восьмом классе обучающийся научится:

I. АРИФМЕТИКА

1. Суммы

- работать с рекуррентными соотношениями;
- выделять и доказывать закономерности, связанные с рядом Фибоначчи;
- доказывать свойства чисел Фибоначчи, связанные с суммированием.

2. Числа и их свойства

- доказывать иррациональность чисел вида \sqrt{n} , где n — натуральное число, не являющееся точным квадратом;
- доказывать иррациональность чисел, являющихся суммой таких чисел;
- использовать свойства сопряженных чисел при решении задач;

- применять свойства рациональности и иррациональности суммы, разности, произведения и частного иррациональных чисел;
- доказывать свойства периодических и непериодических десятичных дробей, связанные с конечностью и бесконечностью повторения цифр.

3. Закономерности

- составлять формулы закономерностей;
- доказывать алгебраические равенства и формулы закономерностей с помощью метода математической индукции;
- применять метод математической индукции в случае, когда шаг индукции отличен от 1.

4. Время и движение

- решать задачи на движение с помощью введения нескольких переменных и дальнейшего рационального решения получающейся линейной или нелинейной системы уравнений;
- применять известные неравенства (неравенство Коши, неравенство Штурма) при решении сложных задач на движение.

II. ГЕОМЕТРИЯ

1. Геометрическое мышление

- применять дополнительные построения при решении геометрических задач (удвоение медианы, откладывание равного отрезка на продолжении стороны («спрямление»), построение середины отрезка, проведение высот, вспомогательной окружности).

2. Площади

- вычислять площади фигур с помощью приема трансформации площадей;
- доказывать равенство площадей фигур с помощью приема трансформации площадей.

3. Геометрические неравенства

- доказывать и использовать при решении задач неравенство ломаной (обобщение неравенства треугольника);
- доказывать и применять при решении задач теорему о монотонности периметра.

4. Аналитические методы в геометрии

- применять метод координат для решения геометрических задач;
- использовать векторы и их свойства в геометрических задачах на доказательство.

III. АЛГЕБРА

1. От чисел к буквам

- доказывать и применять при решении задач свойства многочленов с целыми коэффициентами;
- использовать теорему Виета для решения нестандартных задач;
- применять свойства квадратного трехчлена при решении задач.

2. Функциональные зависимости

- применять геометрический смысл коэффициентов квадратного трехчлена, график квадратного трехчлена для решения задач;
- исследовать относительное расположение графиков квадратных трехчленов с определенными свойствами;
- находить максимальное/минимальное значение квадратичной функции;
- использовать симметричность графика квадратичной функции относительно прямой, проходящей через вершину параболы.

3. Неравенства и оценки

- доказывать и применять транснеравенство для доказательства неравенств;
- доказывать и применять неравенство Чебышева;
- определять свойства неравенств, связанные с перестановками переменных (симметрические, циклические неравенства);
- использовать метод упорядочивания переменных при доказательстве неравенств;
- доказывать и использовать неравенство Коши — Буняковского — Шварца при доказательстве неравенств;
- выводить и применять лемму Титу.

IV. ТЕОРИЯ ЧИСЕЛ

1. Делимость

- использовать понятие степеней вхождения простых чисел для решения нелинейных уравнений в натуральных, целых, целых неотрицательных числах;
- применять метод бесконечного спуска в доказательствах «от противного»;
- использовать соображения делимости при решении нелинейных уравнений в целых числах.

2. Остатки

- доказывать малую теорему Ферма с помощью рассмотрения остатков произведений при делении на p и с помощью метода математической индукции;

- применять малую теорему Ферма для решения теоретико-числовых задач;
- доказывать и применять в задачах теорему Вильсона.

V. ЛОГИКА

1. Математическая логика

- применять принцип крайнего при решении логических задач;
- строить логические формулы и использовать их для построения отрицаний сложных высказываний;
- решать логические задачи со сложными высказываниями;
- применять законы де Моргана;
- строить таблицы истинности.

2. Принципы решения задач

- фиксировать и доказывать наличие инварианта в процессе;
- применять инвариант для доказательства общих утверждений о ходе процесса, для выяснения результата процесса;
- находить и применять инварианты, связанные с делимостью и остатками;
- применять инвариант при решении геометрических задач.

3. Алгоритмы и конструкции

- составлять алгоритмы, не зависящие от промежуточных результатов работы, и обосновывать их корректность;
- применять кодировку числами других систем счисления при построении алгоритмов взвешиваний, угадывания, на клетчатых досках и для доказательства невозможности составления алгоритма с меньшим числом действий.

4. Игры и стратегии

- доказывать существование стратегии в математической игре для двух игроков без приведения самой стратегии.

VI. КОМБИНАТОРИКА И ТЕОРИЯ МНОЖЕСТВ

1. Комбинаторика

- применять метод «шаров и перегородок» при решении комбинаторных задач;
- строить взаимно однозначные соответствия между комбинаторными задачами;
- решать задачи о подсчете количества множеств и подмножеств с определенными свойствами.

2. Теория множеств

- выводить комбинаторным способом и использовать формулу включений-исключений для нескольких множеств.

ВИ. КОМБИНАТОРНАЯ ГЕОМЕТРИЯ

1. Раскраски и разбиения

- строить правильные реберные и вершинные раскраски, доказывать возможность их построения для графа с определенными свойствами.

2. Теория графов

- использовать метод выделения остовного дерева для решения задач теории графов;
- применять метод «подвешивания» графа за вершину для доказательства утверждений теории графов;
- использовать дополнительный граф, рассмотрение «антиребер» при решении задач;
- применять графы в задачах теории чисел, комбинаторной геометрии.

3. Комбинаторная геометрия

- доказывать эквивалентность определений выпуклого многоугольника;
- доказывать возможность триангуляции выпуклого многоугольника;
- доказывать и применять лемму о диагонали;
- выводить и применять формулы суммы градусных мер внутренних и внешних углов многоугольника;
- использовать графы-деревья при решении задач о триангуляции многоугольников.

Обучающийся получит возможность научиться при решении олимпиадных задач самостоятельно:

- анализировать текст задачи, внетекстовую информацию;
- анализировать вопрос (требование) задачи;
- находить взаимосвязи между условиями задачи и использовать их для построения модели и хода решения;
- строить модели на основе уже известных (график на координатной плоскости, схема, таблица, диаграмма Эйлера — Венна, граф, уравнение, неравенство);
- выбирать общий подход к решению задачи;
- при необходимости корректировать ход решения задачи в процессе ее решения;
- конструировать собственный способ решения задачи;
- применять общие принципы решения задач (анализ «узких мест», принцип крайнего, масштабирование задачи, индуктивные рассуждения);
- формулировать и доказывать необходимые вспомогательные свойства (леммы);
- проверять решение задачи на соответствие условиям и требованиям, непротиворечивость математическому и жизненному опыту;
- излагать решение задачи в письменной и устной форме.

9 класс

К концу обучения в девятом классе обучающийся научится:

I. АРИФМЕТИКА**1. Суммы**

- применять свойства арифметической, геометрической прогрессии при решении задач;
- решать задачи с произвольными рекуррентными соотношениями.

2. Числа и их свойства

- применять свойства рациональности и иррациональности в алгебраических, геометрических задачах;
- доказывать невозможность построения правильных многоугольников с вершинами в узлах сетки.

3. Закономерности

- строить доказательства методом математической индукции с более сложными схемами;
- приводить примеры неверного применения метода математической индукции;
- применять метод математической индукции для решения геометрических, комбинаторных, комбинаторно-геометрических, теоретико-числовых задач.

4. Время и движение

- сводить текстовые задачи (на движение, совместную работу и т. д.) к линейным и нелинейным системам с несколькими переменными.

II. ГЕОМЕТРИЯ**1. Геометрическое мышление**

- доказывать свойства движений и применять их при решении задач (центральная, осевая, скользящая симметрия, поворот, параллельный перенос);
- доказывать свойства гомотетии, поворотной гомотетии и применять их при решении задач.

2. Площади

- доказывать методом математической индукции формулу Пика для вычисления площадей многоугольников с вершинами в узлах сетки;
- применять формулу Пика при решении задач.

3. Геометрические неравенства

- рассматривать различные случаи в геометрических задачах (в том числе при дополнительном построении).

4. Аналитические методы в геометрии

- применять теоремы синусов и косинусов в доказательствах.

III. АЛГЕБРА

1. От чисел к буквам

- доказывать и применять теорему Безу для многочленов;
- использовать понятие асимптотики при решении задач;
- применять теорему Виета для многочленов n степени.

2. Функциональные зависимости

- решать задачи распознавания функций по их свойствам и значениям;
- выводить интерполяционный многочлен в форме Лагранжа;
- использовать интерполяцию при решении задач.

3. Неравенства и оценки

- доказывать и применять неравенство о средних для n чисел;
- применять метод Штурма для доказательства неравенств.

IV. ТЕОРИЯ ЧИСЕЛ

1. Делимость

- вычислять функцию Эйлера для некоторых чисел;
- доказывать теорему Эйлера и применять ее при решении задач.

2. Остатки

- использовать понятие первообразного корня при решении задач;
- применять порядок (показатель) числа по модулю и его свойства при решении задач;
- доказывать малую теорему Ферма с помощью показателей;
- использовать классы вычетов при доказательстве утверждений.

V. ЛОГИКА

1. Математическая логика

- решать логические задачи, связанные с теорией графов и другими областями математики.

2. Принципы решения задач

- фиксировать и доказывать наличие полуинварианта в процессе;
- применять инвариант для доказательства конечности процесса;
- применять инвариант при решении задач комбинаторной геометрии, теории графов, геометрических задач.

3. Алгоритмы и конструкции

- доказывать невозможность построения алгоритма при определенных условиях;

- оценивать сложность алгоритмов.

4. Игры и стратегии

- конструировать стратегии для игр на графах;
- использовать двоичную систему счисления в задачах теории игр.

VI. КОМБИНАТОРИКА И ТЕОРИЯ МНОЖЕСТВ

1. Комбинаторика

- применять бином Ньютона, треугольник Паскаля при решении задач.

2. Теория множеств

- доказывать формулу включений-исключений с помощью метода математической индукции;
- применять взаимно однозначное соответствие множеств для упрощения подсчета количества вариантов.

VII. КОМБИНАТОРНАЯ ГЕОМЕТРИЯ

1. Раскраски и разбиения

- вычислять хроматическое число некоторых графов;
- доказывать планарность графов;
- доказывать и применять теорему Эйлера для связного плоского графа.

2. Теория графов

- доказывать и применять критерии существования эйлера пути и эйлера цикла в графе;
- решать задачи о поиске гамильтонова пути и цикла в графе;
- использовать ориентированный граф как модель;
- доказывать существование гамильтонова пути в полном ориентированном графе;
- приводить примеры графов без гамильтоновых циклов.

3. Комбинаторная геометрия

- использовать опорную прямую многоугольника при решении задач;
- доказывать существование выпуклой оболочки множеств;
- использовать выпуклую оболочку для решения задач и доказательства утверждений.

Обучающийся получит возможность научиться при решении олимпиадных задач самостоятельно:

- анализировать текст задачи, внетекстовую информацию;
- анализировать вопрос (требование) задачи;
- находить взаимосвязи между условиями задачи и использовать их для построения модели и хода решения;

- строить модели на основе уже известных (график на координатной плоскости, схема, таблица, диаграмма Эйлера — Венна, граф, уравнение, неравенство);
- выбирать общий подход к решению задачи;
- при необходимости корректировать ход решения задачи в процессе ее решения;
- конструировать собственный способ решения задачи;
- применять общие принципы решения задач (анализ «узких мест», принцип крайнего, масштабирование задачи, индуктивные рассуждения);
- формулировать и доказывать необходимые вспомогательные свойства (леммы);
- проверять решение задачи на соответствие условиям и требованиям, непротиворечивость математическому и жизненному опыту;
- излагать решение задачи в письменной и устной форме.